

Sujet 1

Exercice 1.

- Décomposez $F(X) = 1/(X(X+1))$ en éléments simples.
- Déduisez-en :
 - que $u_n = \sum_{k=1}^n 1/(k(k+1))$ définit une suite convergente.
 - une primitive de $x \mapsto 1/(x(x+1))$ entre -1 et 0 .

Exercice 2.

Décomposez $F(X) = X^4/(X^3 - 1)$ en éléments simples sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} .

Exercice 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- Calculez le déterminant de A puis le produit $A \times F$.
- Déduisez de 1. le déterminant des matrices B, C, D, E, F .

Sujet 2

Exercice 1.

- Décomposez $G(X) = 1/(X(X+2))$ en éléments simples.
- Déduisez-en :
 - que $v_n = \sum_{k=1}^n 1/(k(k+2))$ définit une suite convergente.
 - une primitive de $x \mapsto 1/(x(x+2))$ entre -2 et 0 .

Exercice 2.

Décomposez $G(X) = X^4/(X^3 - 2X^2 + X - 2)$ en éléments simples sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} .

Exercice 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- Calculez le déterminant de A puis le produit $A \times F$.
- Déduisez de 1. le déterminant des matrices B, C, D, E, F .

Sujet 3

Exercice 1.

- Décomposez $H(X) = 1/(X(X+3))$ en éléments simples.
- Déduisez-en :
 - que $w_n = \sum_{k=1}^n 1/(k(k+3))$ définit une suite convergente.
 - une primitive de $x \mapsto 1/(x(x+3))$ entre -3 et 0 .

Exercice 2.

Décomposez $H(X) = X^4/(X^4 + 1)$ en éléments simples sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} .

Exercice 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculez le déterminant de A puis le produit $A \times F$.
- Déduisez de 1. le déterminant des matrices B, C, D, E, F .