Examen d'Actuariat

Durée : 2 heures.
L'utilisation d'un poste informatique, de logiciels de statistique, du cours et d'internet sont autorisés.

Exercice 1. (5pts)

La durée de vie d'un contrat est une variable aléatoire continue de hasard instantané : $\lambda(t) = t; t > 0$.

1. Avec quelle probabilité un contrat expire-il avant son premier anniversaire ?
2. Quelle est la durée de vie médiane des contrats ?
3. Quelle est la durée de vie moyenne des contrats ?

John fête aujourd'hui le premier anniversaire de son contrat.

4. Avec quelle probabilité le contrat de John expirera-t-il dans l'année ?

Sam fête aujourd'hui le second anniversaire de son contrat.

5. Lequel des contrats de Sam et de John a-t-il la plus grande espérance de vie résiduelle ?

Exercice 2. (5pts)

On observe cent durées de vie supérieures à 1 dont la somme des logarithmes vaut 75. On suppose que ces durées de vie sont issues d'une loi de probilité de densité : $f(x;\theta) = \theta/x^{\theta+1}; x \geq 1, \theta > 0$

1. A quelle estimation de θ le Maximum de Vraisemblance conduit-il ?
2. Quelle est la valeur de BIC du modèle estimé ?
3. Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse $\mathscr{H}_0 : \theta = 2$ au profit de $\mathscr{H}_1 : \theta \neq 2$?

Exercice 3. (5pts)

On considère les données `rats{survival}` de R.

1. Déterminez en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier :
   (a) la proportion de rats qui développent une tumeur après cent jours.
   (b) la proportion de femelles malades après cent jours parmi celles qui sont saines à vingt jours.
2. Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : la fonction de survie est la même chez les mâles et chez les femelles ?

Exercice 4. (5pts)

Un contrat est vendu dans une population où la durée de vie est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$. Ce contrat apporte un bénéfice continu au taux instantané : $c(t) = 1,1^t$. Il est payé par :
- un premier versement d'un montant $\pi = 6$ à la signature du contrat
- un second versement du même montant, un an plus tard, si le contrat n'a pas expiré entre temps.

Le taux d'intérêt est constant et vaut 10%. Calculer la valeur actuelle moyenne du bénéfice net dans chacune des situations suivantes.

i le contrat est vendu à un sujet dont le décès entraîne l'expiration du contrat

ii le contrat est vendu à un couple et le bénéfice est versé jusqu'au premier décès

iii le contrat est vendu à un couple et le bénéfice est versé jusqu'à extinction du couple.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux `http://alexandrelourme.free.fr`

Examen d'Actuariat

Durée : 2 heures.
L'utilisation d'un poste informatique, de logiciels de statistique, du cours et d'internet sont autorisés.

Exercice 1. (5pts)

La durée de vie d'un contrat est une variable aléatoire continue de hasard instantané : $\lambda(t) = t; t > 0$.

1. Avec quelle probabilité un contrat expire-il avant son premier anniversaire ?
2. Quelle est la durée de vie médiane des contrats ?
3. Quelle est la durée de vie moyenne des contrats ?

John fête aujourd'hui le premier anniversaire de son contrat.

4. Avec quelle probabilité le contrat de John expirera-t-il dans l'année ?

Sam fête aujourd'hui le second anniversaire de son contrat.

5. Lequel des contrats de Sam et de John a-t-il la plus grande espérance de vie résiduelle ?

Exercice 2. (5pts)

On observe cent durées de vie supérieures à 1 dont la somme des logarithmes vaut 75. On suppose que ces durées de vie sont issues d'une loi de probilité de densité : $f(x;\theta) = \theta/x^{\theta+1}; x \geq 1, \theta > 0$

1. A quelle estimation de θ le Maximum de Vraisemblance conduit-il ?
2. Quelle est la valeur de BIC du modèle estimé ?
3. Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse $\mathscr{H}_0 : \theta = 2$ au profit de $\mathscr{H}_1 : \theta \neq 2$?

Exercice 3. (5pts)

On considère les données `rats{survival}` de R.

1. Déterminez en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier :
   (a) la proportion de rats qui développent une tumeur après cent jours.
   (b) la proportion de femelles malades après cent jours parmi celles qui sont saines à vingt jours.
2. Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : la fonction de survie est la même chez les mâles et chez les femelles ?

Exercice 4. (5pts)

Un contrat est vendu dans une population où la durée de vie est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$. Ce contrat apporte un bénéfice continu au taux instantané : $c(t) = 1,1^t$. Il est payé par :
- un premier versement d'un montant $\pi = 6$ à la signature du contrat
- un second versement du même montant, un an plus tard, si le contrat n'a pas expiré entre temps.

Le taux d'intérêt est constant et vaut 10%. Calculer la valeur actuelle moyenne du bénéfice net dans chacune des situations suivantes.

i le contrat est vendu à un sujet dont le décès entraîne l'expiration du contrat

ii le contrat est vendu à un couple et le bénéfice est versé jusqu'au premier décès

iii le contrat est vendu à un couple et le bénéfice est versé jusqu'à extinction du couple.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux `http://alexandrelourme.free.fr`