Méthodes d'Actuariat Non Vie

Exercice 1.

Un portefeuille comprend $n = 4 \times 10^5$ contrats identiques. Le nombre de sinistres d'un contrat est distribué selon $\mathscr{P}(0,07)$. L'espérance du coût d'un petit sinistre (montant inférieur à $M = 2 \times 10^5$) vaut 10540 € ; celle d'un gros sinistre (montant supérieur à M) vaut $4,1 \times 10^5$ €. L'écart-type du coût d'un petit sinistre vaut 19000 € ; celui d'un gros sinistre vaut $1,3 \times 10^6$ €. Les gros sinistres représentent 1% des sinistres.

1. Calculer la prime pure annuelle d'un contrat.
2. Calculer l'écart-type de la charge annuelle des sinistres sur un contrat.
3. Déterminer la prime commerciale qui rend inférieure à 10% la probabilité d'enregistrer une perte supérieure à 2×10^7 € sur le portefeuille.

Exercice 2.

$X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon aléatoire de $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $\sum_{i=1}^n X_i$ est distribuée selon $\Gamma(n, \lambda)$.

Exercice 3.

N désigne le nombre de sinistres survenant sur un contrat et X_i le montant du sinistre i. Ainsi, le coût global du contrat est : $S = \sum_{i=0}^N X_i$ si $N \geq 1$ et $S = 0$ sinon. On suppose : $N + 1 \sim \mathscr{G}(\alpha)$; pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $X_1, \ldots, X_n \underset{\text{iid}}{\sim} \mathscr{E}(\lambda)$; N est indépendante de chaque variable X_n.

1. Déterminer la fonction de probabilité de $(S|N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la fonction de probabilité de S.
3. Déterminer en fonction de α et λ la probabilité de $(0 \leq S \leq 2)$.

Exercice 4.

On considère le modèle collectif : $S = \sum_{i=0}^N X_i$ dans lequel N désigne le nombre de sinistres sur un contrat et X_i le montant du sinistre i. On suppose que les variables X_i sont distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p.

Déterminer la loi de S quand N est distribuée selon : (i) une loi binomiale de paramètre $(m; \pi)$ (ii) une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 5.

Sur un modèle collectif, on considère pour loi primaire : $N \sim \mathscr{P}(10)$ et pour loi secondaire : $X \sim \mathscr{E}(1/100)$.

1. Déterminer la fonction de probabilité de S.
2. Comparer la loi de S obtenue par : (i) simulation (ii) algorithme de Panjer (iii) convolution de la loi de X.
3. Comparer l'espérance de S obtenue par simulation et par l'algorithme de Panjer.
4. Comparer le quantile d'ordre $0,05$ obtenu par simulation et par l'algorithme de Panjer.
5. Comparer la Value-at-Risk 5% obtenue par simulation et par l'algorithme de Panjer.

Exercice 6.

Sur un modèle collectif, on considère pour loi primaire : $N \sim BN(5; 0,6)$ et pour loi secondaire : $X \sim \Gamma(2; 1/2)$. Comparer la loi de S obtenue par : (i) simulation (ii) algorithme de Panjer.

Exercice 7.

Sur un modèle collectif, on considère pour loi primaire : $N \sim b(10; 0,2)$ et pour loi secondaire : $X \sim Weibull(\lambda = 0,05; \gamma = 2)$. Comparer la loi de S obtenue par : (i) simulation (ii) algorithme de Panjer.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux http://alexandrelourme.free.fr