

Durées de vie - Applications actuarielles

Introduction.

Une durée de vie continue T a pour fonction de densité $f(t)$, de survie $S(t)$, de hasard instantané $\mu(t)$. La variable discrète $\tilde{T} = \lfloor T \rfloor + 1$ est l'âge atteint au moment de disparaître arrondi à l'entier supérieur ; elle a pour fonction de probabilité $\tilde{f}$, de hasard λ , de survie $\tilde{S}$. On cherche à déterminer la valeur actuelle d'un bénéfice/paiement lié à la fin de vie. La fonction d'actualisation à l'instant t_0 d'un montant versé en t est $\nu(t_0, t)$ et par convention : $\nu(t) = \nu(0, t)$.

Bénéfices d'assurance.

◦ Le cas discret

$\mathbf{b} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un vecteur de bénéfices : b_k est le montant perçu à la date $k + 1$ en cas de décès entre k et $k + 1$. La valeur actuelle du bénéfice perçu est : $Z = b_{\tilde{T}-1} \nu(\tilde{T})$; son espérance est : $A_{\tilde{T}}(\mathbf{b}, \nu) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k-1} \nu(k) \tilde{f}(k)$ et sa variance : $V(Z) = A_{\tilde{T}}(\mathbf{b}^2, \nu^2) - [A_{\tilde{T}}(\mathbf{b}, \nu)]^2$ où : $\mathbf{b}^2 = (b_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$.

◦ Le cas continu

$b(t)$ est le montant perçu en cas de décès à l'instant t . La valeur actuelle du bénéfice reçu est : $\bar{Z} = b(T) \nu(T)$; son espérance est : $\bar{A}_T(b, \nu) = \int_0^{+\infty} b(t) \nu(t) f(t) dt$ et sa variance : $V(\bar{Z}) = \bar{A}_T(b^2, \nu^2) - [\bar{A}_T(b, \nu)]^2$.

◦ Approximation du bénéfice continu par le bénéfice discret

$b(t)$ est le montant perçu en cas de décès à l'instant t et $\mathbf{b} = (b(k))_{k \in \mathbb{N}}$. On suppose (i) une force d'intérêts constante : $\exists \nu > 0, \forall t \geq 0, \nu(t) = \nu^t$ et (ii) une durée de vie uniforme après le dernier anniversaire : $\forall k \in \mathbb{N}, (\tilde{T} - T | k \leq T < k + 1) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Alors : $\bar{A}_T(b, \nu) \approx A_{\tilde{T}}((1 - 1/\nu) \times \mathbf{b} / \log(\nu), \nu)$.

◦ Assurance mixte

T_0 est une durée de vie continue de densité f_0 et de fonction de survie S_0 . Pour une durée de vie : $T = \min(T_0, n)$, la valeur actuelle d'un bénéfice continu b défini entre 0 et n et versé à l'instant du décès est : $\bar{Z} = b(T) \nu(T)$; son espérance est : $\bar{A}_T(b, \nu) = \int_0^n b(t) \nu(t) f_0(t) dt + b(n) \nu(n) S_0(n)$ et sa variance : $V(\bar{Z}) = \int_0^n b^2(t) \nu^2(t) f_0(t) dt + b^2(n) \nu^2(n) S_0(n) - [\bar{A}_T(b, \nu)]^2$.

Bénéfices de rente.

◦ Le cas discret

$\mathbf{c} = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un vecteur de bénéfices : c_k est le montant perçu par un sujet à l'instant k s'il survit à k . La valeur actuelle des bénéfices reçus est : $Y = g(\tilde{T})$ où g est définie par : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, g(k) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \nu(j)$.

La valeur actuelle moyenne des bénéfices est : $\bar{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}, \nu) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) \tilde{f}(k)$ (formule de paiements agrégés) et la variance des valeurs actualisées de bénéfices : $V(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)^2 \tilde{f}(k) - [\bar{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}, \nu)]^2$.

$\bar{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}, \nu)$ peut aussi être calculée selon : $\bar{a}_{\tilde{T}}(\mathbf{c}, \nu) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \nu(k) S(k)$ (formule de paiements actuels) et $V(Y)$ selon : $V(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k [u_k + 2 \sum_{j < k} u_j]$ où : $r_k = c_k \nu(k) S(k)$ et $u_k = c_k \nu(k) (1 - S(k))$.

◦ Le cas continu

Un contrat perçoit jusqu'à son terme un bénéfice continu dont le taux à l'instant t est $c(t)$. La valeur actuelle des bénéfices reçus est : $\bar{Y} = \bar{g}(T)$ où $\bar{g}$ est définie par : $\forall t \geq 0, \bar{g}(t) = \int_0^t c(u) \nu(u) du$.

La valeur actuelle moyenne des bénéfices reçus est : $\bar{a}_T(c, \nu) = \int_0^{+\infty} \bar{g}(t) f(t) dt$ et la variance des valeurs actualisées de bénéfices : $V(\bar{Y}) = \int_0^{+\infty} \bar{g}(t)^2 f(t) dt - [\bar{a}_T(c, \nu)]^2$.

$\bar{a}_T(c, \nu)$ peut aussi être calculée selon : $\bar{a}_T(c, \nu) = \int_0^{+\infty} c(t) \nu(t) S(t) dt$ si $\lim_{u \rightarrow +\infty} \bar{g}(u) S(u) = 0$.

Provisions.

$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un vecteur de primes : un contrat verse π_k à l'instant k s'il survit à cet instant ; et $\mathbf{b} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un vecteur de bénéfices : b_k est le montant perçu par un contrat à l'instant $k + 1$ s'il disparaît entre k et $k + 1$.

La perte prospective à l'instant r est la valeur nette du flux à partir de l'instant r , actualisée à l'instant r :

$${}_r L = b_{r+(\tilde{T} \circ r)-1} \times \nu(r, r + \tilde{T} \circ r) - \sum_{j=0}^{(\tilde{T} \circ r)-1} \pi_{r+j} \times \nu(r, r + j)$$

et la provision à l'instant r est la valeur attendue de la perte prospective : ${}_r V = E({}_r L)$.

Primes.

◦ Principe d'équivalence

Les primes reçues compensent en moyenne les bénéfices versés. Ainsi, la valeur actuelle nette de la perte $L =_0 L$ est nulle en moyenne : $E(L) = 0$.

◦ Primes quantiles

Un contrat verse π à l'instant k s'il survit à cet instant ; b_k est le montant perçu par un contrat à l'instant $k+1$ s'il disparaît entre k et $k+1$. La α -prime ($0 < \alpha < 1$) est la plus petite valeur de π pour laquelle la perte L est négative avec probabilité α au moins.

◦ Primes agrégées

Un contrat est vendu pour un montant π ; il fournit un bénéfice dont la valeur actuelle est $\bar{Z}$; la perte prospective liée à ce contrat est : $L = \bar{Z} - \pi$.

Le nombre de contrats à vendre pour que la perte totale soit négative avec une probabilité minimale α est $n \geq [z_\alpha CV(L)]^2$ où z_α désigne le quantile d'ordre α de $\mathcal{N}(0, 1)$ et $CV(L) = \sqrt{V(L)}/E(L)$ le coefficient de variation de L .

$\pi = E(\bar{Z})$ est le montant du contrat permettant une perte nulle en moyenne. Ainsi, $L = \bar{Z} - (1 + \theta)E(\bar{Z})$ est la perte liée à une variation de $(100\theta)\%$ du montant du contrat issu du principe d'équivalence. Pour que la vente de n contrats entraîne une perte totale négative avec probabilité minimale α , il faut : $\theta \geq z_\alpha CV(\bar{Z})/\sqrt{n}$.
