Durées de vie - Généralités

Durée de vie.

Une durée de vie T est une variable aléatoire réelle dont le support est dans $\mathbb{R}^+$. Sa fonction de répartition F est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ et sa fonction de survie S par : $\forall t \in \mathbb{R}, S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t)$.

Quelques propriétés générales de la fonction de survie : (i) S est une fonction décroissante, (ii) en tout point elle est continue à droite et admet une limite à gauche, (iii) sa limite à gauche en 0 vaut 1, (iv) sa limite en $+\infty$ vaut 0.

Le cas continu.

On suppose que le support de T est un intervalle $\mathscr{I}$ de réels positifs et que T admet une densité f continue sur $\mathscr{I}$. Ainsi : $\mathbb{P}(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$.

La fonction de hasard instantané[a] λ est définie en tout $t \geq 0$ où $S(t) > 0$ par : $\lambda(t) = f(t)/S(t)$ et la fonction de hasard cumulé par : $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$.

Quelques propriétés liées au cas continu :

(i) la fonction de survie est dérivable en tout t situé à l'intérieur de $\mathscr{I}$ et $S'(t) = -f(t)$,

(ii) l'espérance de T peut être calculée grâce à la fonction de survie : $E(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$,

(iii) en tout $t > 0$ où la fonction de survie est non nulle : $\lambda(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t)$,

(iv) la fonction de survie et la fonction de hasard instantané sont liées par : $\forall t > 0, S(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s\}$,

(v) la probabilité pour un sujet vivant en t de disparaître avant $t + \mathrm{d}t$ est : $\mathbb{P}(T \leq t + \mathrm{d}t | T > t) = \lambda(t)\mathrm{d}t$.

Le cas discret.

On suppose que la disparition survient aux instants entiers. Le support de T est inclus dans $\mathbb{N}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $S(k)$ représente la probabilité d'être toujours en vie à l'instant k. La fonction de probabilité f de la variable T est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = \mathbb{P}(T = k)$; elle est liée à la fonction de survie S par : $f(k) = S(k-1) - S(k)$.

La fonction de hasard instantané λ est définie en tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $S(k-1) > 0$ par : $\lambda(k) = f(k)/S(k-1)$. $\lambda(k)$ représente la probabilité conditionnelle de disparaître à l'instant k quand on est vivant à $k-1$.

Quelques propriétés liées au cas discret : (i) l'espérance de T peut être calculée grâce à la fonction de survie : $E(T) = \sum_{j=0}^{+\infty} S(j)$, (ii) les fonctions de survie et de hasard sont liées par : $\forall k \in \mathbb{N}, S(k) = \prod_{j=0}^{k}(1 - \lambda(j))$.

Durée de vie résiduelle.

T est une durée de vie, S_T sa fonction de survie, f_T sa fonction de probabilité, λ_T la fonction de hasard. On suppose dans ce paragraphe que T est continue, mais les définitions énoncées s'étendent au cas discret.

Pour $u \geq 0$ tel que $S_T(u) > 0$, la variable conditionnelle : $T \circ u = (T - u | T > u)$ représente la durée de vie résiduelle d'un sujet vivant à l'instant u ; sa fonction de survie est : $S_{T\circ u}(t) = S_T(u+t)/S_T(u)$, sa fonction de probabilité : $f_{T\circ u}(t) = f_T(u+t)/S_T(u)$ et sa fonction de hasard : $\lambda_{T\circ u}(t) = \lambda_T(u+t)$.

Remarque. Lorsque $u = x \in \mathbb{N}$, on note $T_{(x)} = T \circ x$ la durée de vie résiduelle au delà de l'âge x.

Définition (dominance stochastique). X et Y sont deux variables aléatoires réelles. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y (ou que Y domine stochastiquement X) et on note $X \leq_{\mathrm{st}} Y$ si : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X > \alpha) \leq \mathbb{P}(Y > \alpha)$.

Propriété. La fonction de hasard λ_T est croissante si et seulement si $T \circ u$ décroît stochastiquement lorsque u croît.

Approximation standard.

Pour une durée de vie continue T, la partie entière[b] de T que l'on note $\lfloor T \rfloor$ représente l'âge du sujet au moment de sa disparition ; $\tilde{T} = \lfloor T \rfloor + 1$ est l'âge qu'il aurait atteint s'il avait survécu à la date de son anniversaire.

S et $\tilde{S}$ désignant les fonctions de survie de T et $\tilde{T}$, en tout entier k : $S(k) = \tilde{S}(k)$; f et $\tilde{f}$ désignant leurs fonctions de probabilité : $\tilde{f}(k) = \int_0^1 f(k-1+t)\mathrm{d}t = S(k-1) - S(k)$.

On ne dispose souvent que d'observations sur $\tilde{T}$; pour calculer des probabilités sur T, on suppose alors que f est constante par morceaux : pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t < 1$, $f(k+t) = \tilde{f}(k+1)$.

Cette hypothèse appelée *approximation standard* revient à supposer qu'entre k et $k+1$, la fonction de survie de T est affine : pour $0 < t < 1$, $S(k+t) = (1-t)S(k) + tS(k+1)$.

L'approximation standard implique que :

(i) la variable $R = \tilde{T} - T$ est uniforme entre 0 et 1 quel que soit l'âge du décès : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $(R | \tilde{T} = k) \sim \mathscr{U}_{]0,1]}$.

(ii) l'espérance de T et celle de $\tilde{T}$ sont liées par : $E(T) = E(\tilde{T}) - 1/2$; leurs variances sont liées par : $V(T) = V(\tilde{T}) + 1/12$.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux `http://alexandrelourme.free.fr`

[a] appelée parfois taux de hasard, fonction d'intensité ou fonction de défaillance

[b] la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x