

Chapitre 1 – Processus de Poisson – L’essentiel du cours

CH1DEF1 (*top, temps d’attente, espacement, processus de comptage*). Un événement appelé top advient de façon aléatoire au cours du temps. Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note S_k le temps d’attente du top k à partir de l’instant 0. $T_1 = S_1$ et pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note $T_k = S_k - S_{k-1}$ l’espacement entre les tops $k-1$ et k .

Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S_k = \sum_{i=1}^k T_i$ et si $t > 0$, $N(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_k \leq t)}$ est le nombre de tops entre 0 et t .

L’ensemble de variables aléatoires $\{N(t); t > 0\}$, noté aussi $\{N(t)\}$, est un processus de comptage.

CH1DEF2 (*Processus de Poisson*). Un processus de comptage $\{N(t)\}$, est un Processus de Poisson de densité λ ($\lambda > 0$) si pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes et distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ .

CH1PROP1 (*distribution du nombre de tops, des temps d’attente*). Si $\{N(t)\}$ est un Processus de Poisson de densité λ alors : (i) pour tout $t > 0$, $N(t)$ est distribuée selon $\mathcal{P}(\lambda t)$ et (ii) pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, S_k est distribuée selon $\Gamma(k; \lambda)$.

Remarque. $\forall t > 0, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : [N(t) \leq k] = [S_{k+1} > t]$ et $[N(t) \geq k] = [S_k \leq t]$. Ces égalités d’événements permettent de transformer un calcul de probabilité basé sur la loi de Poisson en un calcul basé sur la loi Gamma, et vice versa.

CH1EX1. $\{N(t)\}$ est un Processus de Poisson de densité $\lambda = 0,5$. Calculer $\mathbb{P}(N(4) \leq 5)$.

◦ Méthode 1. $N(4) \sim \mathcal{P}(2)$ et $\mathbb{P}(N(4) \leq 5) = \mathbb{P}(\mathcal{P}(2) \leq 5) \approx 0,98$.

◦ Méthode 2. $\mathbb{P}(N(4) \leq 5) = \mathbb{P}(S_6 > 4) = \mathbb{P}(\Gamma(6; 0,5) > 4) = 1 - \mathbb{P}(\Gamma(6; 0,5) \leq 4) = 1 - \int_0^4 0,5^6 \times x^5 \times e^{-0,5x} dx / 5! \approx 0,98$.

CH1PROP2 (*accroissements indépendants*). Un Processus de Poisson $\{N(t)\}$ est à accroissements indépendants : les nombres de tops comptés dans des intervalles disjoints sont des variables aléatoires indépendantes.

Conséquence. $\mathbb{P}(N(11) - N(4) = 3, N(17) - N(12) = 5) = \mathbb{P}(N(11) - N(4) = 3) \times \mathbb{P}(N(17) - N(12) = 5)$; en effet, les intervalles $]4; 11]$ et $]12; 17]$ étant disjoints, les variables : $N(11) - N(4)$ et $N(17) - N(12)$ qui comptent le nombre de tops dans ces intervalles sont indépendantes.

CH1PROP3 (*accroissements stationnaires*). Un Processus de Poisson $\{N(t)\}$ est à accroissements stationnaires : traduire plusieurs intervalles de temps d’une même durée ne change pas la loi conjointe des nombres de tops comptés dans ces intervalles.

Conséquence. $\mathbb{P}(N(11) - N(4) = 3, N(14) - N(8) = 5) = \mathbb{P}(N(18) - N(11) = 3, N(21) - N(15) = 5)$. En effet : $N_1 = N(11) - N(4)$ compte le nombre de tops dans $]4; 11]$, $N_2 = N(14) - N(8)$ le nombre de tops dans $]8; 14]$, $\tilde{N}_1 = N(18) - N(11)$ le nombre de tops dans $]11; 18]$, $\tilde{N}_2 = N(21) - N(15)$ le nombre de tops dans $]15; 21]$; la loi de (N_1, N_2) est la même que celle de $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ car les intervalles $]11; 18]$ et $]15; 21]$ sont obtenus par translation de $]4; 11]$ et $]8; 14]$ d’une même durée : $+7$.

CH1EX2. $\{N(t)\}$ est un Processus de Poisson de densité $\lambda = 0,5$. Calculer $\alpha = \mathbb{P}(N(5) \geq 3, N(7) \leq 4)$.

◦ Méthode 1 (valeur exacte).

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{P}(N(5) = 3, N(7) - N(5) = 0) + \mathbb{P}(N(5) = 3, N(7) - N(5) = 1) + \mathbb{P}(N(5) = 4, N(7) - N(5) = 0) \\ &\stackrel{\text{AI}}{=} \mathbb{P}(N(5) = 3) \times \mathbb{P}(N(7) - N(5) = 0) + \mathbb{P}(N(5) = 3) \times \mathbb{P}(N(7) - N(5) = 1) + \mathbb{P}(N(5) = 4) \times \mathbb{P}(N(7) - N(5) = 0) \\ &\stackrel{\text{AS}}{=} \mathbb{P}(N(5) = 3) \times \mathbb{P}(N(2) = 0) + \mathbb{P}(N(5) = 3) \times \mathbb{P}(N(2) = 1) + \mathbb{P}(N(5) = 4) \times \mathbb{P}(N(2) = 0) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{P}(2,5) = 3) \times \mathbb{P}(\mathcal{P}(1) = 0) + \mathbb{P}(\mathcal{P}(2,5) = 3) \times \mathbb{P}(\mathcal{P}(1) = 1) + \mathbb{P}(\mathcal{P}(2,5) = 4) \times \mathbb{P}(\mathcal{P}(1) = 0) \\ &= (e^{-2,5} \times 2,5^3 / 3!) \times (e^{-1} \times 1^0 / 0!) + (e^{-2,5} \times 2,5^3 / 3!) \times (e^{-1} \times 1^1 / 1!) + (e^{-2,5} \times 2,5^4 / 4!) \times (e^{-1} \times 1^0 / 0!) \approx 0,206 \end{aligned}$$

◦ Méthode 2 (estimée par simulation). $\mathbb{P}(N(5) \geq 3, N(7) \leq 4) = \mathbb{P}(S_3 \leq 5, S_5 > 7)$. Ainsi, on estime α en simulant 1000 Processus de Poisson de densité $\lambda = 0,5$ puis en calculant la proportion de processus pour lesquels $[S_3 \leq 5]$ et $[S_5 > 7]$ sont réalisés.

Simulation sous R

```
SIMP=function(){ # simule une réalisation de S_1, ..., S_5
T=rexp(5,0.5) # T_1, ..., T_5 sont distribuées selon une exponentielle de paramètre 0,5
S=cumsum(T) # le temps d'attente S_k est la somme des espacements T_1, ..., T_k

NB=0 ; for (i in 1:1000){S=SIMP()}
NB=NB+ ( (S[3]<=5) & (S[5]>7) ) }
NB/1000 # proportion de processus vérifiant (S_3<=5) & (S_5>7)
```

Simulation sous Python

```
from scipy.stats import expon
def SIMP():
    T=expon.rvs(scale=1/0.5,size=5)
    S=[sum(T[0:k]) for k in range(1,6)]
    return(S)

NB=0
for i in range(1,1001):
    S=SIMP()
    NB=NB+float((S[2]<=5.0)&(S[4]>7.0))

print(float(NB)/1000.0)
```

CH1PROP4 (*processus marqués*). Si chaque top d'un Processus de Poisson $\{N(t)\}$ de densité λ peut être classé dans une catégorie i ($i \in \{1, \dots, r\}$) avec probabilité π_i ($\forall i \in \{1, \dots, r\}, \pi_i > 0 ; \sum_{i=1}^r \pi_i = 1$) indépendamment des autres tops, alors : (a) le nombre $N_i(t)$ de tops comptés dans la catégorie i entre 0 et t définit le processus marqué : $\{N_i(t)\}$ (b) quel que soit i , $\{N_i(t)\}$ est un Processus de Poisson de densité $\lambda\pi_i$ (c) les processus marqués : $\{N_1(t)\}, \dots, \{N_r(t)\}$ sont indépendants.

CH1EX3. Le nombre $N(t)$ d'incidents enregistrés par un satellite entre 0 et t définit un Processus de Poisson de densité $\lambda = 2$ incidents/semaine ; 30% des incidents sont sérieux, les autres légers. Avec quelle probabilité observe-t-on au moins deux incidents sérieux dans un mois où trois incidents surviennent.

Le nombre d'incidents sérieux entre 0 et t : $N_1(t)$ définit un Processus de Poisson de densité $\lambda_1 = 0,6$ et le nombre d'incidents légers dans le même intervalle : $N_0(t)$ un Processus de Poisson de densité $\lambda_0 = 1,4$; les processus marqués $\{N_0(t)\}$ et $\{N_1(t)\}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1(4) \geq 2 | N(4) = 3) &= \mathbb{P}(N_1(4) \geq 2, N(4) = 3) / \mathbb{P}(N(4) = 3) \\ &= [\mathbb{P}(N_1(4) = 2, N(4) = 3) + \mathbb{P}(N_1(4) = 3, N(4) = 3)] / \mathbb{P}(N(4) = 3) \\ &= [\mathbb{P}(N_1(4) = 2, N_0(4) = 1) + \mathbb{P}(N_1(4) = 3, N_0(4) = 0)] / \mathbb{P}(N(4) = 3) \\ &\stackrel{\text{IND}}{=} [\mathbb{P}(N_1(4) = 2) \times \mathbb{P}(N_0(4) = 1) + \mathbb{P}(N_1(4) = 3) \times \mathbb{P}(N_0(4) = 0)] / \mathbb{P}(N(4) = 3) \\ &= [\mathbb{P}(\mathcal{P}(2, 4) = 2) \times \mathbb{P}(\mathcal{P}(5, 6) = 1) + \mathbb{P}(\mathcal{P}(2, 4) = 3) \times \mathbb{P}(\mathcal{P}(5, 6) = 0)] / \mathbb{P}(\mathcal{P}(8) = 3) \\ &= [(e^{-2,4} \times 2,4^2 / 2!) \times (e^{-5,6} \times 5,6^1 / 1!) + (e^{-2,4} \times 2,4^3 / 3!) \times (e^{-5,6} \times 5,6^0 / 0!)] / (e^{-8} \times 8^3 / 3!) = 0,216 \end{aligned}$$

CH1PROP5 (*somme de processus*). Si $\{N_1(t)\}$ et $\{N_2(t)\}$ sont deux Processus de Poisson indépendants de densité λ_1 et λ_2 , alors $\{N_1(t) + N_2(t)\}$ est un Processus de Poisson de densité $\lambda_1 + \lambda_2$.

CH1EX4. Le nombre de spams publicitaires reçus par M. Li entre 0 et t : $N_1(t)$ définit un Processus de Poisson de densité $\lambda_1 = 3$ spams/jours et le nombre de spams malveillants reçus dans le même laps de temps : $N_2(t)$ définit un Processus de Poisson de densité $\lambda_2 = 1$ spam/jours ; $\{N_1(t)\}$ et $\{N_2(t)\}$ sont indépendants. Avec quelle probabilité M. Li reçoit-il au moins six spams en un week-end ?

Le nombre de spams entre 0 et t est $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Puisque $\{N_1(t)\}$ et $\{N_2(t)\}$ sont indépendants, $N(t)$ définit un Processus de Poisson de densité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 4$ spams/jour. Ainsi : $\mathbb{P}(N(2) \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(N(2) \leq 5) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}(8) \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^5 e^{-8} \times 8^k / k! \approx 0,80$.