

TD 2 – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. (*loi uniforme*)

1. On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. X est le numéro de la face apparente.

(a) Quelle est la loi de X ?

Puisque le dé est équilibré, il y a autant de chances que X vaille 1, 2, ..., 6. X est distribuée selon la loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $\llbracket 1; 6 \rrbracket$: $X \sim \mathcal{U}_{\llbracket 1; 6 \rrbracket}$

(b) Que valent son espérance et sa variance ?

$$E(X) = (1 + 6)/2 = 3,5 ; V(X) = (6^2 - 1)/12 = 35/12.$$

(c) Avec quelle probabilité X vaut-elle au plus 2 ?

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X \in \{1; 2\}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

2. Reprenez la question 1. en supposant les faces du dé numérotées de 0 à 5.

Supposons que le dé de 1. porte deux numérotations : les faces sont numérotées de 1 à 6 en noir et chaque face numérotée i en noir est numérotée $i - 1$ en rouge.

Quand on lance le dé, le numéro noir de la face apparente : X et le numéro rouge de la face apparente : Y sont liés par : $Y = X - 1$.

(a) Y prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 5 ; puisque X est distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, 6 \rrbracket$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k + 1) = 1/6$. Y est distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $\llbracket 0, 5 \rrbracket$; on note : $Y \sim \mathcal{U}_{\llbracket 0, 5 \rrbracket}$.

(b) $E(Y) = E(X - 1) = E(X) - 1 = 2,5$; $V(Y) = V(X - 1) = V(X) = 35/12$.

(c) $\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(X - 1 \leq 2) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X = i) = 3 \times 1/6 = 1/2$.

Exercice 2. (*loi binomiale et loi hypergéométrique*)

85% des anglais aiment le thé. Y : nombre d'amateurs de thé parmi dix anglais choisis au hasard.

1. Quelle est la loi de Y ?

Y est distribuée selon une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,85$: $Y \sim b(10; 0,85)$.

2. Que valent son espérance et sa variance ?

$$E(Y) = np = 10 \times 0,85 = 8,5. V(Y) = np(1 - p) = 10 \times 0,85 \times 0,15 = 1,275.$$

3. Avec quelle probabilité y a-t-il parmi les dix anglais choisis : (a) quatre (b) de quatre à six (c) au plus huit amateurs de thé ?

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \binom{10}{4} \times 0,85^4 \times 0,15^6 \approx 0,00125 \text{ (R : dbinom(4, 10, 0.85))}.$$

Sur 100000 échantillons de 10 anglais, on attend 125 échantillons avec quatre amateurs de thé.

$$\mathbb{P}(4 \leq Y \leq 6) = \sum_{k=4}^6 \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=4}^6 \binom{10}{k} \times 0,85^k \times 0,15^{10-k} \approx 0,0498 \text{ (R : sum(dbinom(4:6, 10, 0.85)))}.$$

Sur 10000 échantillons de 10 anglais, on attend 498 échantillons comportant de quatre à six amateurs de thé.

$$\mathbb{P}(Y \leq 8) = 1 - \mathbb{P}(Y > 8) = 1 - \sum_{k=9}^{10} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - \sum_{k=9}^{10} \binom{10}{k} \times 0,85^k \times 0,15^{10-k} \approx 0,456.$$

Sur 1000 échantillons de 10 anglais, on attend 456 échantillons comportant huit amateurs de thé au plus.

Un groupe de 100 anglais compte 85 amateurs de thé. Z : nombre d'amateurs de thé parmi dix sujets du groupe.

4. Quelle est la loi de Z ?

Z est distribuée selon une loi hypergéométrique de paramètres $N = 100$ (taille de la population), $n = 10$ (taille de l'échantillon), $p = 0,85$ (proportion d'amateurs de thé dans la population) : $Z \sim \mathcal{H}(100; 10; 0,85)$.

5. Que valent son espérance et sa variance ?

$$E(Z) = np = 10 \times 0,85 = 8,5. V(Z) = np(1 - p)(N - n)/(N - 1) = 10 \times 0,85 \times 0,15 \times (100 - 10)/(100 - 1) = 12,75/11.$$

6. Avec quelle probabilité y a-t-il parmi les dix sujets choisis : (a) quatre (b) de quatre à six (c) huit amateurs de thé au plus ?

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \binom{85}{4} \binom{15}{6} / \binom{100}{10} \approx 0,0006 \text{ (R : dhyper(4, 85, 15, 10))}.$$

Sur 10000 échantillons de 10 anglais, on attend 6 échantillons avec quatre amateurs de thé.

$$\mathbb{P}(4 \leq Z \leq 6) = \sum_{k=4}^6 \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=4}^6 \binom{85}{k} \binom{15}{10-k} / \binom{100}{10} \approx 0,041 \text{ (R : sum(dhyper(4:6, 85, 15, 10)))}.$$

Sur 1000 échantillons de 10 anglais, on attend 41 échantillons comportant de quatre à six amateurs de thé.

$$\mathbb{P}(Z \leq 8) = 1 - \mathbb{P}(Z > 8) = 1 - \sum_{k=9}^{10} \mathbb{P}(Z = k) = 1 - \sum_{k=9}^{10} \binom{85}{k} \binom{15}{10-k} / \binom{100}{10} \approx 0,46.$$

Sur 100 échantillons de 10 anglais, on attend 46 échantillons comportant huit amateurs de thé au plus.

Exercice 3. (loi de Poisson)

Le nombre quotidien d'appels publicitaires que reçoit John est distribué selon une loi de Poisson de paramètre 2.
 X : le nombre quotidien d'appels publicitaires que reçoit John. $X \sim \mathcal{P}(2)$

1. Combien d'appels John reçoit-il chaque jour, en moyenne ? Avec quelle variance ?

$$E(X) = V(X) = 2.$$

2. Avec quelle probabilité recevra-t-il demain : (a) trois appels exactement ? (b) de trois à quatre appels ? (b) au moins trois appels ?

$$\mathbb{P}(X = 3) = e^{-2} \times 2^3 / 3! \approx 0,18 \text{ (R : dpois(3, 2))}.$$

John a 18% de chances de recevoir trois appels exactement.

$$\mathbb{P}(X \in \{3, 4\}) = \sum_{k=3}^4 e^{-2} \times 2^k / k! \approx 0,27 \text{ (R : sum(dpois(3:4, 2)))}.$$

John a 27% de chances de recevoir de trois à quatre appels.

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 e^{-2} \times 2^k / k! \approx 0,32 \text{ (R : 1-ppois(2, 2))}.$$

John a 32% de chances de recevoir de trois à quatre trois appels.

3. Avec quelle probabilité recevra-t-il un appel au moins cet après midi sachant qu'il a déjà reçu un appel ce matin ?

$$\mathbb{P}(X \geq 2 | X \geq 1) = \mathbb{P}((X \geq 2) \cap (X \geq 1)) / \mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 2) / \mathbb{P}(X \geq 1) = [1 - \mathbb{P}(X < 2)] / [1 - \mathbb{P}(X < 1)] = [1 - \mathbb{P}(X \in \{0, 1\})] / [1 - \mathbb{P}(X = 0)] = [1 - \sum_{k=0}^1 e^{-2} \times 2^k / k!] / [1 - e^{-2} \times 2^0 / 0!] \approx 0,69. \text{ John a 69\% de chances de recevoir au moins un appel cet après midi s'il en a reçu un ce matin.}$$

Exercice 4. (loi géométrique)

Quand un alpiniste tente de gravir le Mont-Blanc, il a trois chances sur dix de parvenir au sommet.
 X : nombre de tentatives jusqu'au Mont-Blanc. $X \sim \mathcal{G}(0,3)$.

1. Combien de tentatives faut-il en moyenne pour parvenir au sommet du Mont-Blanc ?

$$E(X) = 1/0,3 = 10/3 \approx 3,3.$$

Il faut 3,3 tentatives à un alpiniste, en moyenne, pour parvenir au sommet du Mont-Blanc.

2. Avec quelle probabilité Bob réussira-t-il à la troisième tentative ?

$$\mathbb{P}(X = 3) = 0,7^2 \times 0,3 = 0,147 \text{ (R : dgeom(3-1, 0.3))}.$$

Bob a 15% de chances environ de réussir le Mont-Blanc à la troisième tentative.

3. Avec quelle probabilité faudra-t-il au moins trois tentatives pour réussir ?

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \sum_{k=1}^2 \mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^2 0,7^{k-1} \times 0,3 = 0,49 \text{ (R : 1-pgeom(1, 0.3))}.$$

Bob a 49% de chances de réussir le Mont-Blanc après trois tentatives au moins.

En réalité, un alpiniste a trois chances sur dix de parvenir au sommet du Mont-Blanc en hiver et six chances sur dix en dehors de la saison hivernale.

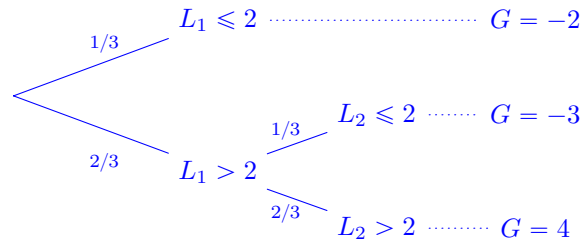
4. Avec quelle probabilité Bob réussira-t-il à la troisième tentative ? (les tentatives ont lieu dans la même saison)

La saison S prend la valeur H (hivernale) avec probabilité $1/4$ et $\bar{H}$ (non hivernale) avec probabilité $3/4$. Le nombre X de tentatives jusqu'à réussir le Mont-Blanc est distribué selon une loi géométrique de paramètre $0,3$ en hiver : $(X|S = H) \sim \mathcal{G}(0,3)$ et selon une loi géométrique de paramètre $0,6$ en dehors de l'hiver : $(X|S = \bar{H}) \sim \mathcal{G}(0,6)$.

$$\mathbb{P}(X = 3) \stackrel{FPT}{=} \mathbb{P}((X = 3) \cap (S = H)) + \mathbb{P}((X = 3) \cap (S = \bar{H})) = \mathbb{P}(X = 3|S = H) \times \mathbb{P}(S = H) + \mathbb{P}(X = 3|S = \bar{H}) \times \mathbb{P}(S = \bar{H}) = \mathbb{P}(\mathcal{G}(0,3) = 3) \times 0,25 + \mathbb{P}(\mathcal{G}(0,6) = 3) \times 0,75 = 0,7^2 \times 0,3 \times 0,25 + 0,4^2 \times 0,6 \times 0,75 = 0,10875.$$

Exercice 5. (loi discrète quelconque)

Dans un jeu de hasard, on lance un dé (équilibré, à six faces) une première fois. Si la face apparente du dé vaut au plus 2, le joueur perd deux euros et le jeu s'arrête. Sinon, le joueur lance une nouvelle fois le dé ; il perd alors trois euros si la nouvelle face apparente du dé vaut au plus 2 et gagne quatre euros dans le cas contraire. Déterminez la loi de probabilité du gain, son espérance et sa variance.



Le gain G associé à une partie prend pour valeurs : -2 , -3 ou 4 .

$$\mathbb{P}(G = -2) = \mathbb{P}(L_1 \leq 2) = 2/6 = 1/3.$$

$$\mathbb{P}(G = -3) = \mathbb{P}(L_1 > 2, L_2 \leq 2) = \mathbb{P}(L_2 \leq 2 | L_1 > 2) \times \mathbb{P}(L_1 > 2) \stackrel{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(L_2 \leq 2) \times \mathbb{P}(L_1 > 2) = (1/3) \times (2/3) = 2/9.$$

$$\mathbb{P}(G = 4) = \mathbb{P}(L_1 > 2, L_2 > 2) = \mathbb{P}(L_2 > 2 | L_1 > 2) \times \mathbb{P}(L_1 > 2) \stackrel{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(L_2 > 2) \times \mathbb{P}(L_1 > 2) = (2/3) \times (2/3) = 4/9.$$

Loi de probabilité de G .

valeurs du gain	-3	-2	4
probabilité	2/9	1/3	4/9

$$E(G) = (-3) \times 2/9 + (-2) \times 1/3 + 4 \times 4/9 = 4/9 \quad (\text{R : } \text{v=c}(-3, -2, 4) \quad ; \quad \text{p=c}(2/9, 1/3, 4/9) \quad ; \quad \text{sum}(\text{p} \times \text{v})).$$

$$V(G) = ((-3)^2 \times 2/9 + (-2)^2 \times 1/3 + 4^2 \times 4/9) - (4/9)^2 = 7470/729 \quad (\text{R : } \text{sum}(\text{p} \times \text{v}^2) - \text{sum}(\text{p} \times \text{v})^2).$$

Exercice 6. (approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson)

10% des trèfles de mon jardin ont quatre feuilles. Que vaut la probabilité α d'observer dix trèfles à quatre feuilles parmi trente trèfles de mon jardin ? Vous donnerez la valeur exacte de α , puis une valeur approchée de α en approchant une loi binomiale par une loi de Poisson.

X désigne le nombre de trèfles à quatre feuilles parmi trente trèfles cueillis dans mon jardin. $X \sim b(30; 0, 1)$.

Calcul de α :

$$\alpha = \mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(b(30; 0, 10) = 10) = \binom{30}{10} \times 0,1^{10} \times 0,9^{20} \approx 3,7 \times 10^{-4} \quad (\text{R : } \text{dbinom}(10, 30, 0, 1)).$$

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson :

$$\alpha = \mathbb{P}(b(30; 0, 10) = 10) \approx \mathbb{P}(\mathcal{P}(30 \times 0, 10) = 10) = e^{-3} \times 3^{10}/3! \approx 8,1 \times 10^{-4} \quad (\text{R : } \text{dpois}(10, 3)).$$

NB. L'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson est possible puisque les conditions sont réunies ($n \geq 30$, $p \leq 0, 1$) ; cependant elle conduit à une erreur supérieure à 100%.

Exercice 7. (loi binômiale et formule de Bayes)

La Dépêche confie tous ses articles à deux pigistes : John (60% des articles) ou Bob (40% des articles). Quand John écrit un texte, un mot sur dix en moyenne est mal orthographié, contre un mot sur cinq pour Bob. A quel auteur attribueriez vous un titre de dix mots dont deux comportent une faute ?

Z : l'auteur d'un article. $Z \in \{J; B\}$; $\mathbb{P}(Z = J) = 1 - \mathbb{P}(Z = B) = 0, 6$.

X : nbre de mots mal orthographiés dans un titre de dix mots. $(X|Z = J) \sim b(10; 0, 1)$; $(X|Z = B) \sim b(10; 0, 2)$.

$$\mathbb{P}(Z = J|X = 2) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \mathbb{P}(X = 2|Z = J) \times \mathbb{P}(Z = J) / \mathbb{P}(X = 2)$$

$$\text{Or, } \mathbb{P}(X = 2|Z = J) = \mathbb{P}(b(10; 0, 1) = 2) = \binom{10}{2} \times 0, 1^2 \times 0, 9^8 \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &\stackrel{\text{FPT}}{=} \mathbb{P}(X = 2|Z = J) \times \mathbb{P}(Z = J) + \mathbb{P}(X = 2|Z = B) \times \mathbb{P}(Z = B) \\ &= \mathbb{P}(b(10; 0, 1) = 2) \times \mathbb{P}(Z = J) + \mathbb{P}(b(10; 0, 2) = 2) \times \mathbb{P}(Z = B) \\ &= \binom{10}{2} \times 0, 1^2 \times 0, 9^8 \times 0, 6 + \binom{10}{2} \times 0, 2^2 \times 0, 8^8 \times 0, 4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(Z = J|X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \times 0, 1^2 \times 0, 9^8 \times 0, 6}{\binom{10}{2} \times 0, 1^2 \times 0, 9^8 \times 0, 6 + \binom{10}{2} \times 0, 2^2 \times 0, 8^8 \times 0, 4} \approx 0, 49.$$

Il y a 49% de chances qu'un titre de dix mots comportant deux mots mal orthographiés ait été écrit par John.

Exercice 8. (lois discrètes sous R)

Complétez le tableau suivant en vous aidant du logiciel R .

<i>loi de X</i>	$\mathbb{P}(X = 3)$		$\mathbb{P}(X \leq 3)$	
	<i>commande sous R</i>	<i>valeur</i>	<i>commande sous R</i>	<i>valeur</i>
binomiale (10; 0, 2)				
Poisson (2)				
géométrique (0, 4)				
hypergéométrique (20; 5; 0, 65)				
<i>loi de X</i>	$\mathbb{P}(X = 3)$		$\mathbb{P}(X \leq 3)$	
	<i>commande sous R</i>	<i>valeur</i>	<i>commande sous R</i>	<i>valeur</i>
binomiale (10; 0, 2)	<code>dbinom(3,10,0.2)</code>	$\approx 0,20$	<code>pbinom(3,10,0.2)</code>	$\approx 0,879$
Poisson (2)	<code>dpois(3,2)</code>	$\approx 0,18$	<code>ppois(3,2)</code>	$\approx 0,857$
géométrique (0, 4)	<code>dgeom(2,0.4)</code>	$= 0,144$	<code>pgeom(2,0.4)</code>	$= 0,784$
hypergéométrique (20; 5; 0, 65)	<code>dhyper(3,13,7,5)</code>	$\approx 0,387$	<code>phyper(3,13,7,5)</code>	$\approx 0,594$