TRAVAUX DIRIGÉS 1

Exercice 1 :

Si la densité de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par

$$f(x) = \begin{cases} k(9-x^2) & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad sinon \end{cases}$$

(a) déterminer la valeur de la constante k qui assure que $f(x)$ est une densité de probabilité;

(b) déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) déterminer $\mathbb{P}(X > 2)$. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X \geq 2)$?

Exercice 2 :

Un agent technique d'une entreprise vérifie, à l'aide d'un calibre, le diamètre d'une pièce fabriquée par une machine. La pièce est classée "défectueuse" si le diamètre est trop petit ou trop grand. D'après les données recueillies depuis un certain temps par le département de contrôle de la qualité, la machine présente 10% de pièces défectueuses. Un lot de 500 pièces vient d'être fabriquée. L'agent technique sélectionne au hasard 5 pièces de ce lot.

(a) Identifier la variable aléatoire qui est concernée dans cette expérience, les valeurs possibles de cette variable ainsi que sa loi de probabilité.

(b) Quelle est la probabilité d'observer 3 pièces défectueuses dans un échantillon de taille $n = 5$?

(c) Quelle est la probabilité d'observer plus de 2 pièces défectueuses dans l'échantillon de taille $n = 5$?

Exercice 3

Un ordinateur génère de nombres aléatoires selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/3$. Les nombre générés sont indépendants.

(a) Quelle est la probabilité que chacun des trois premiers nombres générés soit supérieur à 9 ?

(b) Soit N le nombre de nombres aléatoires supérieurs à 9 parmi les 20 premiers nombres générés. Calculer la variance de N.

(c) Quelle est la probabilité que le premier nombre généré est supérieur à 3 ?

Exercice 4 :

Le responsable du comité de sécurité d'une entreprise a effectué une compilation du nombre d'accidents de travail qui se sont produits depuis 2 ans dans l'usine. Ceci a permis d'établir que le taux moyen d'accidents de travail été de $1,6$ accident/jour.

(a) En admettant que le nombre d'accidents par jour obéit à la loi de Poisson, quelle est l'expression qui permettrait de calculer la probabilité d'observer k accidents par jour ?

(b) Quel est l'écart-type σ de la v.a. concernée ?

(c) Quelle est la probabilité d'observer plus de 2 accidents par jour ?

(d) Calculer la probabilité d'avoir un nombre d'accidents compris dans l'intervalle $[E[X] - \sigma, E[X] + \sigma]$?

Exercice 5 :
Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants:

(a) 56% ont un taux inférieur à 165 cg;

(b) 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg;

(c) 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg?

Exercice 6 :
Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g, mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g.

(a) Par quelle loi est-il raisonnable de modéliser le poids des paquets ?

(b) Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant entre 480g et 520g ? (*utiliser la table de* $\mathcal{N}(0, 1)$)

(c) Combien de paquets pèsent entre 480g et 490g ?

(d) Sur 1000 paquets, quel est le nombre moyen de paquets pesant plus de 450g ?

(e) Trouver a tel que les 9/10 de cette production aient un poids compris entre $500 - a$ et $500 + a$.

Exercice 7 :
Soient X_1, X_2, X_3, trois variables aléatoires de loi normale indépendantes telles que $E[X_1] = 100$, $\text{Var}(X_1) = 100$, $E[X_2] = 20$, $\text{Var}(X_2) = 4$, $E[X_3] = 50$, $\text{Var}(X_3) = 25$. On forme la combinaison linéaire $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$.

Déterminer $E[Y]$ et $\text{Var}(Y)$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 8 :
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ et $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 9 :
Soit X le nombre de versions différentes d'un programme qu'un étudiant en informatique doit écrire pour obtenir un programme qui fonctionne. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/4$. On considère un classe de 20 étudiants qui doivent tous écrire un programme individuellement.

(a) Calculer $\mathbb{P}(4 \leq X < 6)$;

(b) Soit N le nombre d'étudiants, parmi les 20, qui doivent écrire exactement deux versions de leurs programmes pour obtenir une version qui fonctionne. Calculer $\mathbb{P}(N \leq 1)$.

Exercice 10 :
Les joueurs A et B jettent un dé non pipé indépendamment chacun 100 fois. Quelle est la probabilité approximative que le total de A dépasse celui de B d'au moins 25?

Exercice 11 :
Une certaine tâche est faite en trois étapes. On suppose que la durée de chacune de ces étapes est aléatoire et que ces durées sont indépendantes. Admettons que ces dernières suivent toutes une loi normale dont on trouvera les paramètres en minutes dans le tableau suivant.

Étape	Moyenne	Écart-type
1	17	2
2	13	1
3	13	2

Calculer la probabilité que la tâche prenne moins de 40 minutes.

Exercice 12 :
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{25}$ deux échantillons aléatoires indépendants provenant respectivement d'une loi $\mathcal{N}(3, 16)$ et d'une loi $\mathcal{N}(2, 9)$. Soient:

$$\bar{X} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i \quad ; \quad S_X^2 = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{25}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{et}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} Y_i \quad ; \quad S_Y^2 = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{25}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

Évaluer les probabilités suivantes en justifiant les propriétés et les lois utilisées.

(a) $\mathbb{P}(\bar{X} > 4, \bar{Y} < 1)$ (**Ici la virgule signifie "et" !**)

(b) $\mathbb{P}(\bar{Y} > 0.5, S_X^2 > 18.07, S_Y^2 < 5.89)$

(c) $\mathbb{P}(\bar{X} < 3 - 0.137 S_X)$.

(d) $\mathbb{P}(S_X^2 / S_Y^2 < 3.52)$.

Exercice 13 : Un quartier strasbourgeois très populeux est composé à 64% de francophones et a 36% d'allemandes. Si on prélève au hasard n individus ($n \geq 30$) de ce quartier, quelle est la valeur minimale de n pour que la probabilité que l'échantillon contienne plus de francophones que d'allemandes soit supérieure à 99%.

Exercice 14 :
Soit $X_1, \ldots, X_{36}$ un échantillon aléatoire de la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculer approximativement $P(0.48 < \bar{X}_{36} < 0.52)$.

Exercice 15 :
Un astronome souhaite mesurer la distance, en années-lumière, entre son observatoire et une étoile lointaine. Bien qu'il connaisse une technique de mesure, il sait aussi que chaque résultat ne constitue qu'une distance approchée, en raison des influences atmosphériques et d'autre causes d'erreur inévitables. Par conséquent, notre astronome prévoit de prendre plusieurs mesures et d'accepter leur moyenne comme estimation de la distance réelle. Il a des raisons de penser que les différentes valeurs mesurées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance commune d (la vraie valeur) et de variance commune 4 (l'unité étant toujours l'année lumière). Combien de mesures doit-il réaliser pour être sûr à 95% que l'erreur soit inférieure à une demi-année-lumière ?