Devoir Surveillé 2 de Statistiques.

Durée : une heure.
La calculatrice est autorisée. Tout autre matériel électronique (le téléphone portable en particulier) est interdit.

Exercice 1. (2 pts)

1. Déterminez $\mathbb{P}(0,7 < |X| < 0,88)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $X \sim \mathscr{N}(0;1)$
   (b) $X \sim \mathscr{T}_{10}$
2. T est distribuée selon une loi de Student à douze degrés de liberté ($T \sim \mathscr{T}_{12}$).
   (a) Déterminez t de sorte que $\mathbb{P}(|T| > t) = 0,2$
   (b) t est un quantile de la loi $\mathscr{T}_{12}$; de quel ordre ?

Exercice 2. (4 pts) La masse des anglais est distribuée selon une loi normale de moyenne μ, de variance σ^2 ; Quatre anglais choisis au hasard pèsent respectivement 78, 85, 91, 74kg.

1. Proposez un IC de μ au niveau 90% pour un échantillon aléatoire de taille quatre.
2. Interprétez cet intervalle.
3. Vue la masse des quatre anglais pesés, se peut-il que $\mu = 80$?

Exercice 3. (6 pts) On suppose que 51% des électeurs voteront pour M. Yale aux prochaines élections. On choisit n électeurs au hasard dont les votes pour/contre M. Yale sont indépendants.

1. Avec quelle probabilité obtient-on huit partisans de M. Yale lorsque $n = 10$?
2. Avec quelle probabilité les partisans de M. Yale sont-ils minoritaires si $n = 100$?
3. Déterminez n de sorte que les partisans de M. Yale soient majoritaires avec probabilité $0,95$.

Exercice 4. (2 pts) $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont deux estimateurs de $\theta \in \mathbb{R}^*$, indépendants, sans biais et tels que : $V(\hat{\theta}_1) = 1$ et $V(\hat{\theta}_2) = 2$.

Déterminez α, $\beta \in \mathbb{R}$ de sorte que $\alpha\hat{\theta}_1 + \beta\hat{\theta}_2$ soit un estimateur sans biais de θ, de variance minimale.

Exercice 5. (6 pts) $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon de variables aléatoires réelles *i.i.d.* admettant pour densité : $f(x) = (1+\theta)x^\theta$ si $0 < x < 1$ et $f(x) = 0$ sinon ($\theta > -1$).

1. Déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
2. Quel estimateur de θ obtient-on par la méthode des moments ?