TD 4. Réduction des endomorphismes

Exercice 1. f est l'endomorphisme[a] associé à la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez son polynôme caractéristique.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Déterminez une base de chaque sous-espace propre de f.
4. Montrez qu'il existe une matrice diagonale semblable à F.

Exercice 2. g est l'endomorphisme associé à la matrice $G = 0,5 \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez son polynôme caractéristique.
2. Quelles sont les valeurs propres de g ?
3. Déterminez une base de chaque sous-espace propre de g.
4. Montrez qu'il existe une matrice diagonale semblable à G.

Exercice 3. h est l'endomorphisme associé à la matrice $H = 0,5 \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $2H^2 - 5H + 2I_2 = 0$.
2. Quel est le polynôme caractéristique de h ?
3. Peut-on diagonaliser H ?

Exercice 4. $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. $L = 0,5 \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6. f est l'endomorphisme associé à la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que 2 est l'unique valeur propre de f.
2. Montrez que $u = (1,1)'$ constitue une base de $Ker(f - 2Id)$.
3. Montrez qu'il existe un vecteur non nul v tel que $f(v) = 2v + u$.
4. Justifiez que $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$?

Exercice 7. f est l'endomorphisme associé à la matrice $M = 0,5 \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que : $Sp(f) = \{1; 2\}$.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université Montesquieu - Bordeaux. http://alexandrelourme.free.fr

[a] dans cet exercice, comme dans les exercices suivants, l'espace vectoriel considéré est $\mathbb{R}^n$, n correspondant à l'ordre de la matrice associée à l'endomorphisme

2. Montrez que $u = (-1, 1, 0)'$ constitue une base de $Ker(f - Id)$.
3. Montrez que $v = (1, 0, 1)'$ constitue une base de $Ker(f - 2Id)$.
4. Déterminez w de sorte que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et $f(w) = 2w + v$.
5. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$?

Exercice 8.

1. Montrez que les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9. Montrez que les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 10. g est l'endomorphisme associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez son polynôme caractéristique.
2. Quelles sont les valeurs propres de g ?
3. Déterminez une base de chaque sous-espaces propre de g.
4. Q est-elle diagonalisable ?
5. Montrez que Q est triangularisable.

Exercice 11. h est l'endomorphisme associé à la matrice $H = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifiez que $H^3 - 12H + 16I_3 = 0$.
2. H est-elle triangularisable/diagonalisable ?
3. Exprimez H^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. A est une matrice réelle, carrée d'ordre n, triangulaire supérieure.

1. Montrez que son déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux[b].
2. Montrez que si les coefficients diagonaux sont distincts, A est diagonalisable.

Exercice 13. A est une matrice (réelle) carrée d'ordre n.

1. Montrez que 0 est la seule valeur propre de A lorsque A est nilpotente.
2. Montrez que 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de A lorsque A est idempotente.

Exercice 14. A est une matrice (réelle) carrée régulière, d'ordre n.

1. Montrez que son spectre ne peut pas contenir 0.
2. Montrez que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de A^{-1}.

[b] coefficients de la diagonale principale