

TRAVAUX DIRIGÉS 2**Exercice 1 :**

Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules rouges. On tire simultanément 3 boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X , son espérance, sa variance ?

Exercice 2 :

La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(b) = \begin{cases} 0 & , \quad b < 0 \\ 1/2 & , \quad 0 \leq b < 1 \\ 3/5 & , \quad 1 \leq b < 2 \\ 4/5 & , \quad 2 \leq b < 3 \\ 9/10 & , \quad 3 \leq b < 3,5 \\ 1 & , \quad b \geq 3,5 \end{cases}$$

Calculer la loi de probabilité de X .

Exercice 3 :

Albert, Bernard, Charles et David ont, respectivement, un revenu de 1000€, 1200€, 1300€ et 1500€. On choisit deux personnes au hasard parmi ces 4. Soit X le revenu moyen des 2 personnes tirées. Déterminer la fonction de probabilité de X , $E[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 4 :

Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langue étrangère : 5 en anglais, 2 en allemand et 3 en russe. On prélève au hasard 5 de ces livres. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de volumes en russe prélevés. Déterminer la loi de probabilité, puis la fonction de répartition de X et représenter celle-ci.

Exercice 5 :

A l'arrivée d'une course, il y a 9 chevaux: 4 noirs et 5 blancs. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de chevaux blancs précédant le premier cheval noir. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 6 : Une boîte contient 5 billes rouges et 5 billes bleues. Deux billes sont tirées au hasard. Si elle sont de la même couleur, vous gagnez 1, 10 €; si elles sont de couleurs différentes, vous perdez 1 €. Calculer

- (a) l'espérance du gain;
- (b) la variance du gain.

Exercice 7

Vous passez un QCM comportant 6 questions. A chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Un étudiant qui n'avait pas beaucoup révisé décide de répondre au hasard à chaque question.

- (a) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses de l'étudiant considéré. Donnez la loi de X . Justifier.

- (b) En moyenne combien de réponses correctes a-t-il ?
- (c) L'étudiant réussit le test s'il répond correctement à au moins 5 questions. Quelle est la probabilité qu'il réussisse le test ?
- (d) Quelle est la probabilité que l'étudiant réponde juste aux 5 premières questions et faux à la dernière question ?

Exercice 8 :

Une entreprise utilise, en grande quantité, un type de composants électroniques. On cherche à étudier la fiabilité de ce type de composant.

- (a) Nombre de pannes du composant sur une durée de 2000 jours : On note X la variable aléatoire qui à toute période de 2000 jours consécutifs, associe le nombre de pannes du composant.
 - i. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de composants de ce type, permet d'admettre qu'en moyenne pour ce type de composants, il y a 1 panne pour une période de 2000 jours. Par quelle loi modéliser X ?
 - ii. Calculer la probabilité que le composant ait au plus deux pannes pendant une période de 2000 jours consécutifs.
- (b) Durée de vie du composant : On désigne par T la variable aléatoire qui représente la durée de vie du composant, c'est-à-dire son temps de bon fonctionnement avant une défaillance.
 - i. Par quelle loi modéliser la variable aléatoire T ?
 - ii. On appelle **fiabilité** la fonction définie par :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \quad \forall t \geq 0,$$

où F est la fonction de répartition de T . Elle représente la probabilité qu'a le composant d'être encore en fonctionnement au temps t . Calculer la fonction de fiabilité $R(t)$ en fonction du paramètre λ de la loi de T .

- iii. Des essais effectués sur un grand nombre de ce type de composants, montre qu'à la date $t = 210$ jours, 90% des composants étaient en fonctionnement. En déduire le paramètre λ .
- iv. Quelle est en moyenne la durée de vie du composant ?

Exercice 9 :

Une agence de dactylographie emploie 2 dactylos. Le nombre d'erreurs par article est 3 pour le premier dactylo et 4,2 pour le second. Si un article a autant de chance d'être tapé par l'un ou l'autre dactylo, quelle est la probabilité qu'il ne contienne pas d'erreur ?

Exercice 10 :

Au moins 9 des 12 jurés réunis doivent estimer l'accusé coupable pour rendre le jugement exécutoire. Supposons que la probabilité pour un juré d'estimer un coupable innocent est de 0,2 tandis qu'elle est de 0,1 de commettre l'erreur contraire. Les jurés décident en toute indépendance et 65% des accusés sont coupables. Trouver la probabilité que le jury rende une sentence correcte. Quel pourcentage des accusés sera condamné ?

Exercice 11 :

On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

- (a) Quelle est la probabilité qu'il survienne 3 accidents ou plus lors d'un jour donné?
- (b) Même question si l'on sait qu'un accident au moins a eu lieu.

Exercice 12 :

Un électricien achète des composants par paquets de 10. Sa technique de contrôle est de n'examiner que 3 composants, tirés au hasard dans le paquet, et de n'accepter le lot des 10 que si les 3 composants examinés sont sans défaut. Si 30% des paquets contiennent 4 composants à malfaçon tandis que 70% restants n'en contiennent qu'un, quelle proportion des paquets notre électricien rejettera-t-il ?