

Durée : une heure et demie.

Les calculatrices sont autorisées ; tout autre matériel électronique (comme le téléphone portable) est interdit.

Exercice 1. (10 pts)

Une seule des trois réponses proposées à chacun des dix items suivants est exacte ; **entourez sur cet énoncé sans justification la réponse qui vous semble correcte et rayez les autres**. Une réponse juste apporte un point ; une réponse fausse enlève 0,5 points ; une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de points.

1. La fonction définie par : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ admet un point critique en :
(a) $-0,5$ (b) 0 (c) $0,5$.
2. La fonction $g : x \mapsto x^4 - 4x^3 - 18x^2$ admet un point d'inflexion en :
(a) 1 (b) 2 (c) 3 .
3. La fonction définie par : $h(x) = e^{1-4x}$ pour $x > 100^{100}$ est :
(a) convexe (b) concave (c) convexe puis concave.
4. Lorsque le coût total est une fonction concave de la quantité produite admettant une dérivée d'ordre deux continue, le coût marginal est une fonction :
(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone^a.
5. Lorsqu'on produit 5 hL de lait, le coût moyen est minimal et le coût total vaut 10. On en déduit que le coût marginal vaut :
(a) $0,5$ (b) 1 (c) 2 .
6. La fonction définie si $x > 0$ et $y > 0$ par : $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/2}$ est à rendements d'échelle :
(a) croissants (b) décroissants (c) constants.
7. La fonction $g(x, y) \mapsto -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 6x + 2y$ possède :
(a) un minimum en $(1, 2)$ (b) un maximum en $(1, 2)$ (c) un maximum en $(2, 1)$.
8. Sous la contrainte $y = x + 2$, la fonction définie si $x > 0$ et $y > 0$ par $f(x, y) = x^2y^3$ admet :
(a) un minimum (b) un maximum (c) aucun extremum.
9. Une fonction de x et y dont le $TMST_{x,y}$ est y/x admet un maximum sous la contrainte $2x + y = 4$; cet extremum est atteint en :
(a) $(1, 2)$ (b) $(2, 1)$ (c) $(1, 1)$.
10. Sous la contrainte $x + y = 10$, la fonction définie si $x > 0$ et $y > 0$ par $f(x, y) = x^2y^3$ admet :
(a) un minimum en $(2, 3)$ (b) un maximum en $(2, 3)$ (c) un maximum en $(4, 6)$.

^ani croissante, ni décroissante

Exercice 2. (10 pts)

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant un engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, de sa variété de blé s'écrit :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

où B est la quantité de semences de blé utilisées et N la quantité d'engrais azoté pulvérisée.

A. On suppose que $N = 0$ et on note alors $F(B)$ le rendement.

1. Étudiez la fonction F pour $B \geq 0$.
2. Montrez que F admet un maximum global et déterminez la valeur de ce maximum.

B. On suppose que N et B sont variables.

3. Déterminez le rendement lorsque $B = 8$ et $N = 4$.
4. Montrez que f a un unique point critique $(10, 10)$. Calculez la Hessienne de f en ce point et en déduisez-en la nature de ce point critique.
5. Calculez la valeur de f pour ce point. Comparez la valeur obtenue avec celle de la question 1.
6. On se place dans les conditions de la question 3. Quelle sera la variation relative du rendement si l'on augmente de 8,5% la quantité d'engrais ?

C. On suppose que N et B sont liés par la contrainte $B + 5N = 23$.

7. Déterminez le maximum de f sous la contrainte $B + 5N = 23$.
 8. Proposez une interprétation économique du résultat et comparez cette valeur avec celle de la question 4.
-