

Chapitre 3

Fonctions - Dérivation

Outils Mathématiques

Licence 1 Science Economique & Gestion

Faculté d'économie, gestion & AES

Université de Bordeaux - Collège DSPEG

Automne 2021

A. Lourme

<http://alexandrebourme.free.fr>

Outline

- Limites
- Dérivation
- Calcul de dérivées
- Dérivées et variations
- Dérivées en économie

Limite finie en un point

x_0 est réel ; f est une fonction définie au voisinage de x_0 . f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand $x \neq x_0$ est proche de x_0 . On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ a-t-elle une limite en 2 ?

Etape 1. Représenter f , sous R par exemple.

```
f <- function(x){(sqrt(x)-sqrt(2))/(x-2)}
plot(f,xlim=c(1,3))
```

Quand x approche 2, $f(x)$ approche $\ell \in]0, 34; 0, 36[$.

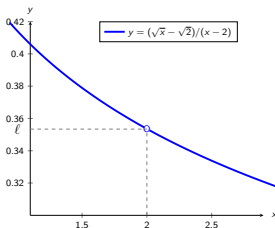
Etape 2. Déterminer la valeur de ℓ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{2}^2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Il semble que f converge en 2 vers $\ell = 1/(2\sqrt{2})$.

Etape 3. Justifier avec la définition : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1/(2\sqrt{2})$.

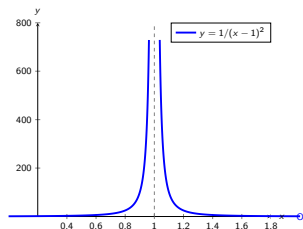
$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-x}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}$ est proche de 0 quand $x \neq 2$ est proche de 2. Ainsi, $f(x)$ est arbitrairement proche de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ si $x \neq 2$ est proche de 2.



Limite infinie en un point

x_0 est un réel ; f est une fonction définie au voisinage de x_0 . f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si $f(x)$ est arbitrairement grand quand $x \neq x_0$ est proche de x_0 . On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 1/(x-1)^2$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ a-t-elle une limite en 1 ?



Etape 1. Représenter f , sous R par exemple.

```
f <- function(x){1/(x-1)^2}
plot(f,xlim=c(0,2))
```

Quand x approche 1, $f(x)$ devient grand.

Etape 2. Confirmer la limite infinie empiriquement.

Sous R, on applique f à des valeurs proches de 1 :

```
sapply(c(0.9,1.1,0.99,1.01),f)
```

```
[1] 100 100 10000 10000
```

Il semble que f converge en 1 vers $+\infty$.

Etape 3. Justifier la limite infinie.

Quand $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ approche 1, $(x-1)^2$ devient proche de 0 et reste strictement positif ; donc $1/(x-1)^2$ devient très grand : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

Rq. Limite $-\infty$: f tend vers $-\infty$ en x_0 si $-f$ tend vers $+\infty$ en x_0 .

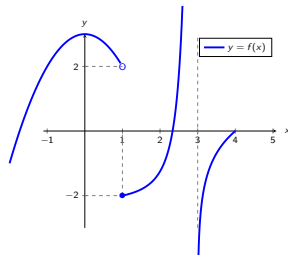
Limite à gauche/à droite en un point

x_0 est réel ; f est une fonction définie au voisinage de x_0 .

f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en x_0 à gauche si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand $x < x_0$ est proche de x_0 . On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$.

f admet pour limite ℓ en x_0 à droite si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand $x > x_0$ est proche de x_0 . On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

Exemple.



La limite de f en 1 à gauche vaut 2 : quand $x < 1$ approche 1, $f(x)$ approche 2

La limite de f en 1 à droite vaut -2 : quand $x > 1$ approche 1, $f(x)$ approche -2

La limite de f en 3 à gauche est $+\infty$: quand $x < 3$ approche 3, $f(x)$ devient grand

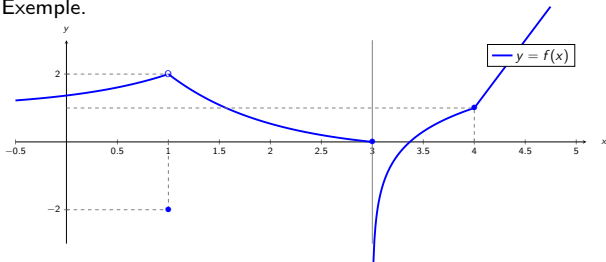
La limite de f en 3 à droite est $-\infty$: quand $x > 3$ approche 3, $f(x)$ devient petit

Continuité

x_0 est réel ; f est une fonction définie au voisinage de x_0 .

f est continue en x_0 si sa limite en x_0 coïncide avec sa valeur en x_0

Exemple.



x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$f(x_0)$	f continue en x_0 ?
1	2	2	2	-2	non
3	0	$-\infty$	$\times$	0	non
4	1	1	1	1	oui

Limite $\pm\infty$ en $+\infty$

f est une fonction définie pour les grandes valeurs de x . f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand quand x est grand : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

Etape 1. Représenter f , sous R par exemple.

```
f <- function(x){x^2/(x-1)}
plot(f,xlim=c(1,10))
```

Quand x devient grand, $f(x)$ devient grand.

Etape 2. Confirmer l'observation graphique.

Sous R, on applique f à des grandes valeurs de x :

```
sapply(c(100,1000,10000,100000),f)
```

```
[1] 101.0101 1001.0010 10001.0001 100001.00
```

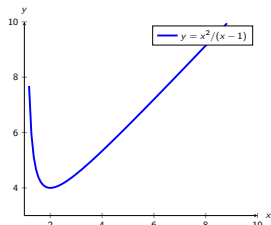
Il semble que f converge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Etape 3. Prouver la limite $+\infty$ en $+\infty$.

Peut-on rendre $f(x)$ définitivement supérieur à tout réel M aussi grand soit-il ?

Oui : si x est grand $f(x) > M$ équivaut à $x^2 - Mx + M > 0$; or, un polynôme : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a quand x est grand. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque. $f(x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si $-f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$



Limite finie en $+\infty$

f est une fonction définie pour les grandes valeurs de x . f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand x est grand. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

Etape 1. Représenter f , sous R.

```
f <- function(x){(x+2)/(x+1)}
```

```
plot(f,xlim=c(1,10))
```

Quand x devient grand, $f(x)$ approche 1.

Etape 2. Confirmer l'observation graphique.

Sous R, on applique f à de grandes valeurs de x :

```
sapply(c(10,100,1000,10000),f)
```

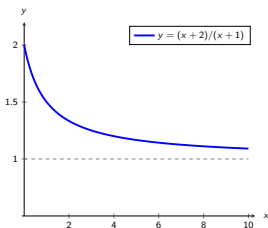
```
[1] 1.090909 1.009901 1.000999 1.0001
```

Il semble que f converge vers 1 en $+\infty$.

Etape 3. Montrer que f converge vers 1 en $+\infty$.

$f(x) - 1 = \frac{x+2}{x+1} - 1 = \frac{1}{x+1}$ est proche de 0 quand x devient grand. Ainsi, $f(x)$ est arbitrairement proche de 1 quand x devient grand. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Rq. Limites en $-\infty$: la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est la limite de $f(-x)$ en $+\infty$.



Limite d'une somme

f : une fonction qui tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

g : une fonction qui tend vers $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en x_0 .

La limite de $f + g$ en x_0 dépend de ℓ et ℓ' :

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
illustration	(a)	(b)		(c)	(d)

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1/x) = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1/x) = +\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2 - \ln x) = +\infty$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x + 1/x)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(-x)}_{\rightarrow -\infty} = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x + 1/x)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(-2x)}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$

Quand f tend vers $+\infty$ et g vers $-\infty$, la limite de $f + g$ ne peut pas être déterminée selon une règle systématique : cette limite est une **forme indéterminée**.

Limite d'un produit

f : une fonction qui tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

g : une fonction qui tend vers $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en x_0 .

La limite de $f \times g$ en x_0 dépend de ℓ et ℓ' :

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	?	$\pm\infty$
illustration	(a)	(b)		

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = 1/2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2} = 1/2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(1/x^2)}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{(x + \sqrt{x})}_{\rightarrow +\infty} = 0 \text{ mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(1/x)}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{(x^2 + \sqrt{x})}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

Limite d'un quotient

f : une fonction qui tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

g : une fonction qui tend vers $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en x_0 .

La limite de f/g en x_0 dépend de ℓ et ℓ' :

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \neq 0$	0	∞	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \in \{0^+, 0^-\}$	0	∞	$+\infty$	$\ell' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\lim f/g$	ℓ/ℓ'	$\pm\infty$	?	?	0	$\pm\infty$
illustration		(a)			(b)	(c)

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 1/x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+ : \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 1/x)/e^{-x} = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (-e^x / \ln x) = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + 2e^{-x}) = 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3 + 2e^{-x}} = +\infty$

Limite d'une composée

f : une fonction de limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; g : une fonction de limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en ℓ .

Alors : la composée de f par g : $g \circ f$ admet pour limite ℓ' en x_0 .

Comment l'écrire ?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = \ell' \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \ell'$$

Exemple 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2-1} = 0$$

Exemple 2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+1/x)^\alpha - 1}{1/x} = \alpha$$

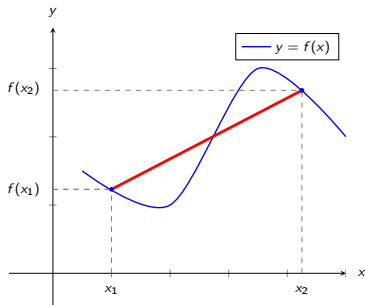
Outline

- Limites
- Dérivation
- Calcul de dérivées
- Dérivées et variations
- Dérivées en économie

Taux d'accroissement

f : une fonction définie sur $\mathbb{R}$; x_1 et x_2 : deux réels distincts.

Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.



Représentation : la pente de la corde (rouge) joignant les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.

Interprétation : la variation moyenne des valeurs de f entre x_1 et x_2 .

Application. Le coût de production de x hL de bière est : $f(x) = 100 + 2x^2$.

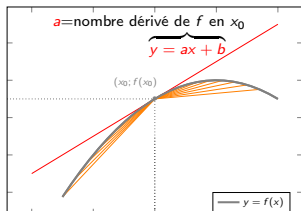
Le taux d'accroissement de f entre 30 et 40 est :

$$\frac{f(40)-f(30)}{40-30} = \frac{(100+2 \times 40^2)-(100+2 \times 30^2)}{10} = 140.$$

Ainsi, chacun des hectolitres produits entre le trentième et le quarantième coûte en moyenne 140 u.m.

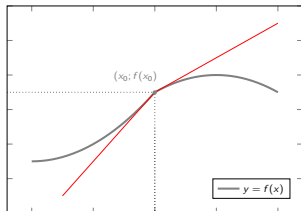
Nombre dérivé - Définition

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en $x_0 \in \mathbb{R}$ est la **limite du taux d'accroissement** de f entre x_0 et $x_0 + h$ quand h tend vers 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.



Que représente-t-il ?

La pente de la tangente à la courbe de f au pt $(x_0; f(x_0))$.



Et s'il n'y a pas de tangente au pt $(x_0; f(x_0))$?

la limite du taux d'accroissement n'existe pas

Le nombre dérivé de f en x_0 n'existe pas

f n'est pas dérivable en x_0

Une fonction f est dérivable en x_0 si sa courbe est lisse au voisinage du pt $(x_0; f(x_0))$.

Remarque. Pour qu'une fonction soit dérivable en x_0 , il faut qu'elle soit continue en

Nombre dérivé - Exemples

- Le taux d'accroissement de $f : x \mapsto x^2$ entre 3 et $3 + h$ est :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6. \text{ Le nombre dérivé de la fonction carré en 3 vaut 6.}$$

- Le taux d'accroissement de $g : x \mapsto 1/x$ entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = -\frac{1}{1+h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1. \text{ Le nombre dérivé de la fonction inverse en 1 vaut } -1.$$

- Le taux d'accroissement de $u : x \mapsto |x|$ entre 0 et h est :

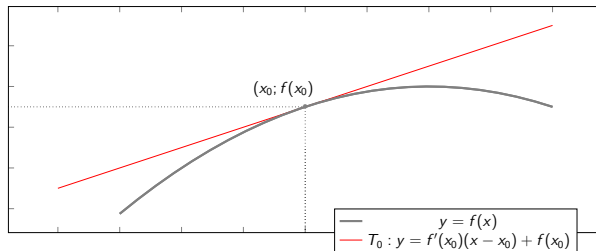
$$\frac{u(0+h)-u(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \geq 0 \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases} \quad \text{Il tend vers 1 lorsque } h \text{ tend vers 0 à}$$

droite et vers -1 lorsque h tend vers 0 à gauche. Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0+h)-u(0)}{h}$ n'existe pas : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Approximation Affine

f est une application dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.

La courbe de f admet une tangente T_0 au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$
d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Ce qu'on observe :

La courbe de f est proche de T_0 au voisinage du point $(x_0; f(x_0))$.

Justification :

Quand x est voisin de x_0 son image par f est proche de $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est l'approximation affine de f au voisinage de x_0 .

Fonction dérivée

Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ si elle admet un nombre dérivé en tout point de I .

L'application qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est la dérivée de f ; on la note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple. $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.

En effet, le taux d'accroissement de f entre x et $x + h$ est :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x.$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le nombre dérivé de la fonction carré en x existe et vaut $2x$.

La fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $x \mapsto 2x$.

Dérivées de référence

<i>La fonction :</i>	<i>est dérivable sur :</i>	<i>et sa dérivée est :</i>
$x \mapsto \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x^p \ (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$	$\mathbb{R}$	px^{p-1}
$1/x^p \ (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-p/x^{p+1}$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-1/x^2$
$\ln x$	$]0; +\infty[$	$1/x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\alpha^x \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}$	$\alpha^x \ln \alpha$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$]0; +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$1/(2\sqrt{x})$

Remarque.

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$; donc : $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = (1/2) \times x^{-1/2} = 1/(2x^{1/2}) = 1/(2\sqrt{x})$.
- $1/x = x^{-1}$; la dérivée de $1/x$ est donc : $(1/x)' = (x^{-1})' = (-1) \times x^{-2} = -1/x^2$.

► Pour s'entraîner : <https://forms.gle/8XJRvqFa4MSc5a9g9>

Outline

- Limites
- Dérivation
- Calcul de dérivées
- Dérivées et variations
- Dérivées en économie

Dérivées et opérations

f et g sont deux applications dérivables sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

○ Dérivée de la somme

$f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Exemple. $(x + \ln x)' = (x)' + (\ln x)' = 1 + 1/x$

○ Dérivée de la différence

$f - g$ est dérivable sur I et $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Exemple. $(x^2 - x^5)' = (x^2)' - (x^5)' = 2x - 5x^4$

○ Dérivée du produit

$f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

Exemple. $(x^2 \ln x)' = (x^2)'(\ln x) + (x^2)(\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times (1/x) = 2x \ln x + x$

○ Dérivée du quotient

f/g dérivable sur $\{x \in I; g(x) \neq 0\}$: $(f/g)'(x) = (f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x))/g(x)^2$

Exemple. $(x/\ln x)' = ((x)'(\ln x) - (x)(\ln x)')/(\ln x)^2 = (\ln x - 1)/(\ln x)^2$

Dérivée d'une composée

f est une application dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$; g est une application dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\{f(x); x \in I\}$.

La composée de f par g est alors dérivable sur I et : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Exemple.

$f : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$

$g : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto 1/x$

L'intervalle $]0; +\infty[$ où g est dérivable contient l'ensemble image de $f : [1; +\infty[$

La composée $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = (1/(x^2 + 1)) \times (2x) = 2x/(x^2 + 1)$$

► Pour s'entraîner : <https://forms.gle/9EU1AB6TZNpWdeb67>

Formules de dérivation

$u : x \mapsto u(x)$ est une application dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

<i>La fonction :</i>	<i>est dérivable sur :</i>	<i>et sa dérivée est :</i>
$u^p \ (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$	I	$pu^{p-1}u'$
$1/u^p \ (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$	$\{x \in I; u(x) \neq 0\}$	$-pu'/u^{p+1}$
$1/u$	$\{x \in I; u(x) \neq 0\}$	$-u'/u^2$
$\ln u$	$\{x \in I; u(x) > 0\}$	u'/u
e^u	I	$u'e^u$
$u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\{x \in I; u(x) > 0\}$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\{x \in I; u(x) > 0\}$	$u'/(2\sqrt{u})$

Exemples.

- $(e^{x^2+1})' \stackrel{(*)}{=} (e^u)' = u'e^u = (x^2+1)'e^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}$; $(*) \ u = x^2 + 1$.
- $[(\ln x)^2]' \stackrel{(**)}{=} (u^2)' = 2uu' = 2 \ln x \times (1/x) = 2(\ln x)/x$; $(**) \ u = \ln x$.

► Pour s'entraîner : <https://forms.gle/p7KnqMS6LqXLQKcXA>

Dérivées & Maxima

Maxima est un logiciel libre de calcul formel ; il permet de calculer/vérifier une dérivée.

- Utilisation en ligne (avec inscription) : <https://www.rollapp.com/app/maxima>
- Téléchargement : <http://maxima.sourceforge.net/download.html>

Exemples.

dérivée de : code Maxima :

$x \mapsto e^{x^2+1}$	<code>factor(diff(exp(x^2+1),x));</code>
$x \mapsto (\ln x)^2$	<code>factor(diff(log(x)^2,x));</code>
$x \mapsto e^{\sqrt{x}}$	<code>factor(diff(exp(sqrt(x)),x));</code>

Outline

- Limites
- Dérivation
- Calcul de dérivées
- Dérivées et variations
- Dérivées en économie

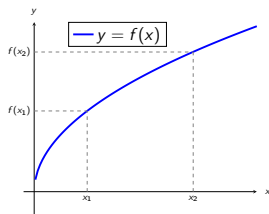
Sens de variation

Une application f d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **croissante** sur I si les **images** des éléments de I **sont rangées dans le même ordre que les antécédents** :

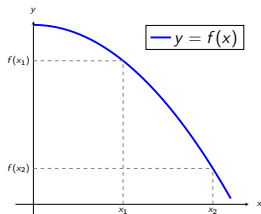
$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f est **décroissante** si les **images** des éléments de I **sont rangées dans l'ordre contraire des antécédents** :

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



f croissante



f décroissante

f est **strictement croissante** si elle est croissante et associe des images distinctes à des réels distincts.

Une application est **monotone** sur I si elle est soit croissante, soit décroissante.

Justifier la monotonie

Pour montrer la monotonie d'une fonction :

Méthode 1. Revenir à la définition d'une fonction croissante/décroissante

Méthode 2. Etudier le signe de la dérivée :

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

f est (strictement) croissante sur I si sa dérivée est (strictement) positive sur I

f est (strictement) décroissante sur I si sa dérivée est (strictement) négative sur I

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ est décroissante entre $-\infty$ et 2.

Méthode 1. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$.

Si $-\infty < x_1 < x_2 < 2$: $x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$; $(x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$;

$(x_1 - 2)^2 - 1 > (x_2 - 2)^2 - 1$; $f(x_1) > f(x_2)$. f est strictement décroissante entre $-\infty$ et 2.

Méthode 2. f est dérivable entre $-\infty$ et 2 et $f'(x) = 2x - 4 < 0$ pour tout $x < 2$. f est donc strictement décroissante entre $-\infty$ et 2.

Remarque. La seconde méthode paraît plus rapide que la première. En réalité :

- elle est moins générale que la première (toutes les fonctions ne sont pas dérivables)
- elle comporte un prix : étudier le signe de la dérivée (pas toujours facile)

Exercice

Sur quels intervalles $f : x \mapsto x^3/3 - x^2 - 3x + 1$ est-elle monotone ?

Etape 1. Calcul de la dérivée.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto x^2 - 2x - 3$

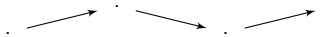
Etape 2. Factorisation de la dérivée.

$x^2 - 2x - 3$ a deux racines : -1 et 3 . $f'(x) = (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$

Etape 3. Signe de la dérivée.

$(x + 1)(x - 3)$ est négatif entre -1 et 3 , positif ailleurs.

Etape 4. Tableau du signe de f' et des variations de f

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
signe de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
variations de f					

f est croît entre $-\infty$ et -1 , décroît entre -1 et 3 , croît entre 3 et $+\infty$.

Outline

- Limites
- Dérivation
- Calcul de dérivées
- Dérivées et variations
- Dérivées en économie

Coût marginal - Définition

x : une variable économique dont un coût y dépend exclusivement.

Le **coût marginal** est la **dérivée du coût total** y par rapport à la variable x

Le coût marginal calculé en x_0 est : $y'(x_0)$

Que représente-t-il ?

$y'(x_0)$ représente la variation approximative du coût quand la variable économique x passe de la valeur x_0 à $x_0 + 1$: $y(x_0 + 1) - y(x_0) \approx y'(x_0)$.

Exemple.

Le coût de production de x hL de Koshu est : $y = 100 + 2x^2$.

Le coût marginal en x est : $y'(x) = 4x$.

Le coût marginal calculé en $x_0 = 5$ est : $y'(5) = 20$.

Interprétation. La coût de production augmente approximativement de 20 u.m. lorsque la production de Koshu passe de 5 à 6 hL.

Remarque. $y(6) - y(5) = (100 + 2 \times 6^2) - (100 + 2 \times 5^2) = 22$.

La coût de production augmente exactement de 22 u.m. lorsque la production de Koshu passe de 5 à 6 hL

Coût marginal - Application

y est le coût en € associé à la production de x tonnes de blé.

(a) Interprétez l'information : $y'(500) = 20$.

Quand on a produit 500 tonnes de blé, produire une tonne de plus coûte environ 20 euros supplémentaires

(b) Doit-on produire au delà de 500 tonnes si la tonne de blé est vendue 25 € ?

Le bénéfice réalisé sur la 501^e tonne est de 5 €. Il reste rentable de produire du blé au delà de 500 tonnes.

(c) Est-il correct d'affirmer : produire 10 tonnes de blé supplémentaires au delà de 500 tonnes coûte environ 200 € ?

Le coût de production peut être remplacé par son approximation affine au voisinage de 500 : $y(x) \approx 20(x - 500) + y(500)$ si x est proche de 500.

$y(x) - y(500) \approx 20(x - 500)$ mais l'approximation est d'autant meilleure que x est proche de 500. En particulier, rien ne garantit qu'elle soit acceptable pour $x = 510$.

Elasticité - Définition

x : une variable économique dont une quantité y dépend exclusivement.

L'élasticité de y en x est : $El_x y(x) = xy'(x)/y(x)$

Que représente-t-elle ?

L'élasticité calculée en x_0 : $El_x y(x_0) = x_0 y'(x_0)/y(x_0)$ représente la variation relative approximative de la quantité y quand la variable économique x augmente de 1% :
 $[y(x_0 + 0,01x_0) - y(x_0)]/y(x_0) \approx El_x y(x_0)$.

Exemple.

Le coût de production de x hL d'Ao Yun est : $y = 150 + 2x^2$.

L'élasticité calculée en x est : $El_x y(x) = xy'(x)/y(x) = 4x^2/(150 + 2x^2)$.

L'élasticité calculée en $x_0 = 5$ est : $El_x y(5) = 4 \times 5^2/(150 + 2 \times 5^2) = 0,5$.

Interprétation. La coût de production augmente approximativement de 0,5% quand la production d'Ao Yun augmente de 1% en passant 5 à 5,05 hL.

Elasticité - Deux cas importants

- L'élasticité des fonctions puissances est constante

Lorsque y est une puissance de $x > 0$: $y = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, son élasticité vaut α .

Justification.

$$\text{El}_x y(x) = xy'(x)/y(x) = x(x^\alpha)' / x^\alpha = x\alpha x^{\alpha-1} / x^\alpha = \alpha x^\alpha / x^\alpha = \alpha$$

Exemple.

Si une demande y dépend d'un prix x selon : $y = 1/\sqrt{x}$, la demande diminue de 0,5% environ quand le prix augmente de 1%.

- L'élasticité des fonctions exponentielles est linéaire

Lorsque y est une exponentielle de x : $y = \alpha^x$ avec $\alpha > 0$, son élasticité vaut $x \ln \alpha$.

Justification.

$$\text{El}_x y(x) = x(\alpha^x)' / \alpha^x = x(e^{x \ln \alpha})' / e^{x \ln \alpha} = x \ln \alpha e^{x \ln \alpha} / e^{x \ln \alpha} = x \ln \alpha$$

Exemple.

Si le bénéfice y tiré d'un investissement x est : $y = 1,1^x$, le bénéfice augmente de $\ln 1,1 \approx 0,1\%$ environ quand le capital investi passe de 1 u.m à 1,01 u.m.

Dérivée logarithmique

y est une application dérivable de x à valeurs strictement positives.

La dérivée logarithmique de y par rapport à x est : $y'(x)/y(x) = \frac{d}{dx} \ln y(x)$

Deux exemples d'utilisation.

- Dérivée logarithmique et élasticité

Si y est une fonction strictement positive de x son élasticité est :

Elasticité de y par rapport à $x = x \times [y'(x)/y(x)] = x \times$ dérivée logarithmique de $y(x)$

- Dérivée logarithmique et capitalisation

Les formules de capitalisation : $y = \gamma \nu^t$ ($\gamma, \nu > 0$) avec t : le temps, γ un paramètre, ν un coefficient dépendant d'un taux (d'intérêt, d'escompte, etc.)

Le coef. ν détermine la vitesse de capitalisation ; il dépend de la dérivée logarithmique de y selon : $\frac{d}{dt} \ln y(t) = \ln \nu$

Références



Dodge, Y.
Mathématiques de base pour économistes.
Springer Science & Business Media, 2007.



Michel, P.
Cours de mathématiques pour économistes.
Editions economica, 1989.



Rossignol, S.
Mathématiques en économie-gestion.
Dunod, 2018.



Sydsaeter, K., Hammond, P. J., Strøm, A., and Citta, M.
Mathématiques pour l'économie.
Pearson, 2014.