Chapitre 1

Eléments de logique & Notations mathématiques

Outils Mathématiques

Licence 1 Science Economique & Gestion

Faculté d'économie, gestion & AES

Université de Bordeaux - Collège DSPEG

Automne 2021

A. Lourme

http://alexandrelourme.free.fr

Outline

- Eléments du calcul des propositions
- Eléments de théorie des ensembles
- Notations mathématiques

Pourquoi calculer des propositions ?

Quels nombres x vérifient E : $x + 2 = \sqrt{4 - x}$?

$(x + 2)^2 = (\sqrt{4 - x})^2$

$x^2 + 4x + 4 = 4 - x$

$x^2 + 5x + 4 = 4$

$x^2 + 5x = 0$

$x(x + 5) = 0$

$x = 0$ ou $x = -5$

Que penser des solutions obtenues ?

Si $x = 0$, alors $x + 2 = 2$ et $\sqrt{4 - x} = 2$; 0 est donc bien solution de E.
Si $x = -5$, alors $x + 2 = -3$, mais $\sqrt{4 - x} = \sqrt{4 - (-5)} = \sqrt{9} = 3$. Ainsi, -5 n'est pas solution de E.

Quelle règle logique enfreint-on pour que les solutions de E ne soient pas 0 <u>et</u> 5 ?

Quelques points de vocabulaire

Une affirmation est :

– une simple ***assertion*** quand elle n'est pas : ou vraie ou fausse

– une ***proposition*** quand elle est : soit vraie soit fausse.

Exemples.

- *Le train est nuageux.*
- *Julie est un garçon.*
- *Julie est jolie.*
- 100 *est un grand nombre.*
- 100 *est plus grand de* 50
- 100 *est plus grand que* 200

La **valeur logique** d'une proposition est son caractère vrai ou faux.

Remarque. Déterminer la valeur logique d'une proposition n'est pas toujours aisé.

Exemples.

- *Le réchauffement climatique ralentit la croissance.*
- *La langue basque est d'origine indo-européenne.*
- *Il existe trois entiers non nuls x, y, z tels que :* $x^3 + y^3 = z^3$.

Connecteurs logiques

On peut effectuer des opérations sur des propositions, comme sur des nombres.

Pour cela, deux opérateurs basiques : 'et' noté $\wedge$, 'ou' noté $\vee$

Si P et Q sont deux propositions :

$P \wedge Q$ désigne la **conjonction** de P et Q ; $P \vee Q$ désigne la **disjonction** de P et Q.

Exemple.

P : Anaïs est jolie ; Q : Anaïs est riche.

$P \wedge Q$: Anaïs est riche <u>et</u> jolie

$P \vee Q$: Anaïs est riche <u>ou</u> elle est jolie

Valeur d'une conjonction, d'une disjonction :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai
faux	vrai	faux	vrai
faux	faux	faux	faux

Exercice. Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ?

$(2 < 3) \vee (2 > 6)$; $(2 < 3) \wedge (2 > 6)$; $2 \geq 2$; $(2 \in [1;4]) \vee (2 \in [3;5])$

Implications et équivalences

P et Q sont deux propositions.

∘ P implique Q si P ne peut pas être vraie sans que Q le soit. On note : $P \Rightarrow Q$.

On dit : P est une **condition suffisante** à Q et Q est une **condition nécessaire** à P.

Exemples. Dans quels cas pouvez-vous affirmer que P implique Q

P : Mon voisin est Japonais ; Q : Mon voisin est asiatique.

P : Ben est un garçon ; Q : Ben aime le football

P : x est un nombre positif ; Q : $\sqrt{x^2} = x$

∘ P et Q sont équivalentes si P implique Q <u>et</u> Q implique P. On note : $P \Leftrightarrow Q$.

Exemples. Dans quels cas pouvez-vous affirmer que P et Q sont équivalentes ?

P : Mon voisin est Japonais ; Q : Mon voisin est asiatique.

P : Ben est un garçon ; Q : Ben aime le football

P : x est un nombre positif ; Q : $\sqrt{x^2} = x$

Négations et contraposées

P et Q sont deux propositions.

◦ La négation de P est la proposition $\neg P$ telle que : P est fausse si $\neg P$ est vraie ; P est vraie si $\neg P$ est fausse.

Exemples. Enoncez la négation de chacune des propositions suivantes ; précisez (si possible) laquelle est vraie de la proposition énoncée ou de sa négation.

- *le soleil est un satellite de la terre*
- *les petites filles aiment jouer à la poupée*
- *la fonction f est positive*
- *le nombre x est positif*

◦ La contraposée de l'implication : $P \Rightarrow Q$ est l'implication inverse entre négations : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Exemples. Enoncez la contraposée de chacune des implications suivantes ; précisez la valeur de vérité de la proposition et de sa contraposée.

- *Les gendarmes sont des militaires*
- *Les poissons sont des ovipares*
- *Si $x \geq 0$ alors $x = |x|$*
- *Si $2x - 8 = 0$ alors $x \in \{4; 5\}$*

Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

Equivalent logique à l'implication

P et Q sont deux propositions.

$P \Rightarrow Q$ a toujours la même valeur de vérité que $(\neg P) \vee Q$.

Justification.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
vrai	vrai	vrai	faux	vrai
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	vrai	vrai

Illustration.

'Si tu n'es pas là, je suis triste' revient à dire : 'Tu es là, ou je suis triste'.

Exercice. Exprimez autrement :

- Quand le chat dort les souris dansent.

- Si Socrate est un homme, alors il est mortel.

- Si x est supérieur à 1 alors $x + 2$ est positif.

Lois de De Morgan

P et Q sont deux propositions.

∘ La proposition $\neg(P \vee Q)$ est logiquement équivalente à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

Justification.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
vrai	vrai	vrai	faux	faux	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai

∘ La proposition $\neg(P \wedge Q)$ est logiquement équivalente à $(\neg P) \vee (\neg Q)$

Justification. A écrire

Illustration. Enoncez la négation de chacune des propositions suivantes.

- Mon meilleur ami est drôle et cultivé

- M. Moldy est bête ou méchant

Quantificateurs : universel et existentiel

E est un ensemble et $P(x)$ une proposition portant sur un élément x de E.

◦ Quantificateur universel : $\forall$ (quel que soit)

Quel que soit l'élément x de l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.
Cette phrase s'écrit : $\forall x \in E, P(x)$

◦ Quantificateur existentiel : $\exists$ (il existe)

Il existe un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ est vraie.
Cette phrase s'écrit : $\exists x \in E, P(x)$

Il existe un unique élément x de l'ensemble E pour lequel $P(x)$ est vraie.
Cette phrase s'écrit : $\exists ! x \in E, P(x)$

Illustration. f est une fonction de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ecrivez avec des quantificateurs :

- la courbe de f coupe l'axe abscisses
- f est la fonction nulle
- f est croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice

Ecrivez la négation de chacune des propositions suivantes.

- Les soldats sont forts et courageux.

- Un de mes amis au moins est drôle ou cultivé.

- Tous mes voisins sont bêtes ou méchants.

- Il existe un renard malin et discret.

- Toute personne en difficulté trouvera quelqu'un pour l'aider.

- Il existe un candidat pour lequel personne ne veut voter.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x^2) \leq 1$

- $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leq 1$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{y} = x$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 - 1 = x$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 - 1 = x$

- $\forall x \geq 1, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 - 1 = x$

Outline

- Eléments du calcul des propositions
- Eléments de théorie des ensembles
- Notations mathématiques

Notion d'ensemble

Un ensemble : une **collection** d'objets de même nature vérifiant une propriété collectivisante.

Les objets qui sont dans un ensemble sont ses **éléments**.

Un ensemble peut être noté :

- en **compréhension** : {élément générique : propriété collectivisante}

- ou en **extension** : {élément 1 ; élément 2 ; élément 3 ; ... }.

a appartient à l'ensemble E se note $a \in E$ et a n'appartient pas à E : $a \notin E$.

Exemple.

L'ensemble des entiers positifs et pairs s'écrit :

- en compréhension : $\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$
- en extension : $\{0; 2; 4; 6; \dots\}$ ou : $\{2 \times k; k \in \mathbb{N}\}$.

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est son **cardinal** : Card E

Un ensemble ne contenant aucun élément est l'**ensemble vide** : $\emptyset$ ou $\{\}$. Un ensemble à un élément est un **singleton**, un ensemble à deux éléments est une **paire**.

Relations entre ensembles

A et B sont deux ensembles d'objets de même nature.

∘ Inclusion.

Si tout élément de A est élément de B on dit : A est inclus dans B, A est une partie de B, A est un sous-ensemble de B et on note : $A \subseteq B$.

Exemple. Dans quels cas a-t-on : $A \subseteq B$?

- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{8; 1; 7; 2\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{8; 1; 2\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{1; |-7|; \sqrt{4}\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{\{2\}; \{7\}; \{1\}\}$

Propriété. Si $A \subseteq B$, alors Card $A \leq$ Card B.

∘ Egalité.

Si A est inclus dans B <u>et</u> B inclus dans A, les ensembles A et B sont égaux : $A = B$.

Exemple. Dans quels cas a-t-on : $A = B$?

- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{8; 1; 7; 2\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{8; 1; 2\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{1; |-7|; \sqrt{4}\}$
- $A = \{2; 7; 1\}$, $B = \{\{2\}; \{7\}; \{1\}\}$

Propriété. Si $A = B$, alors Card $A =$ Card B.

Opérations sur des ensembles

A et B sont deux ensembles d'objets de même nature

∘ Intersection.

L'**intersection** de A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A <u>et</u> B. On la note : $A \cap B$. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.

∘ Réunion.

La **réunion** de A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A <u>ou</u> B. On la note : $A \cup B$.

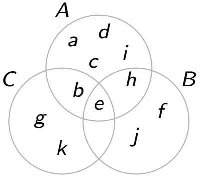
∘ Différence.

La **différence** de A et B est composée des éléments de A qui ne sont pas dans B. On la note $A \backslash B$.

Exemple.

Voici le diagramme de Venn de trois ensembles A, B, C.

Déterminez : $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$,
$A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$,
$A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \backslash C$, $(A \cup B) \backslash C$.



Opérations et cardinaux

Formule du Crible.

A et B sont deux ensembles : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Justification.

Si l'on ajoute les éléments de B à ceux de A pour dénombrer $A \cup B$, les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois (comme éléments de A puis comme éléments de B). Ainsi, il faut retirer $\text{Card}(A \cap B)$ de $\text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pour obtenir $\text{Card}(A \cup B)$.

Application.

Sur mille étudiants consultés, 670 lisent la presse en ligne, 550 sont adeptes de la presse au format en papier et 320 lisent la presse sous les deux formats. Combien d'étudiants ne lisent pas du tout la presse ?

Pour aller plus loin.

Pour trois ensembles A, B, C : $\text{Card}(A \cup B \cup C) =$
$\text{Card}(A)+\text{Card}(B)+\text{Card}(C)-\text{Card}(A\cap B)-\text{Card}(A\cap C)-\text{Card}(B\cap C)+\text{Card}(A\cap B\cap C)$.

Justifiez cette propriété en vous aidant d'un diagramme de Venn.

Ensemble des parties

L'ensemble obtenu en regroupant tous les sous-ensembles d'un ensemble A s'appelle l'ensemble des parties de A et se note $\mathscr{P}(A)$.

Exemple. $A = \{\text{Aurore; Julie; Jeanne}\}$. Les sous-ensembles de A dont le cardinal vaut :

0 sont : $\emptyset$

1 sont : $\{\text{Aurore}\}$, $\{\text{Julie}\}$, $\{\text{Jeanne}\}$

2 sont : $\{\text{Aurore; Julie}\}$, $\{\text{Aurore; Jeanne}\}$, $\{\text{Julie; Jeanne}\}$

3 sont : $\{\text{Aurore; Julie; Jeanne}\}$.

L'ensemble des parties de A est obtenu en regroupant les huit sous-ensembles de A :

$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{\text{Aurore}\}, \{\text{Jeanne}\}, \{\text{Julie}\}, \{\text{Aurore; Julie}\}, \{\text{Aurore; Jeanne}\}, \{\text{Julie; Jeanne}\}, \{\text{Aurore; Julie; Jeanne}\}\}$.

Rq. Tout ensemble est toujours un élément de l'ensemble de ses parties

Rq. L'ensemble vide est toujours un élément de l'ensemble des parties de n'importe quel ensemble.

Propriété.

Un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

Partitions d'un ensemble

Une partition d'un ensemble A est composée de sous-ensembles non vides de A dont la réunion est A et dont les intersections deux à deux sont vides.

A retenir. Etablir une partition de A, c'est répartir les éléments de A dans différents sous-ensembles non vides de A.

Exemple. $A = \{\text{Luc}, \text{Marc}, \text{Jean}, \text{Matthieu}\}$.

La paire : $\{\text{Luc}, \text{Marc}\}$ et les deux singletons : $\{\text{Jean}\}$, $\{\text{Matthieu}\}$ forment une partition de A.

Les paires : $\{\text{Luc}, \text{Matthieu}\}$ et $\{\text{Marc}, \text{Jean}\}$ forment une autre partition de A.

Les sous-ensembles : $\{\text{Luc}, \text{Matthieu}\}$, $\{\text{Marc}, \text{Luc}\}$ et $\{\text{Jean}\}$ ne forment pas une partition de A. Pourquoi ?

Les sous-ensembles : $\{\text{Luc}, \text{Matthieu}\}$, $\{\text{Marc}\}$ ne forment pas une partition de A. Pourquoi ?

Produit cartésien

A et B sont deux ensembles quelconques.

Le produit cartésien : $A \times B$ est un ensemble composé des couples dont la première composante est un élément de A et la seconde composante un élément de B :

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$$

Exemple.

$A = \{\text{Aurore}, \text{Louise}, \text{Jeanne}\}$ et $B = \{\text{vélo}, \text{tram}\}$

$A \times B$: toutes les possibilités pour qu'une des filles fasse une course : $A \times B = \{(\text{Aurore}; \text{vélo}); (\text{Aurore}; \text{tram}); (\text{Jeanne}; \text{vélo}); (\text{Jeanne}; \text{tram}); (\text{Louise}; \text{vélo}); (\text{Louise}; \text{tram})\}$.

Rq. Il n'est pas indispensable que les éléments de A et B soient de même nature pour constituer $A \times B$. Les éléments de $A \times B$ ne sont pas de la même nature que ceux de A ou B.

Propriété.

Le produit cartésien de deux ensembles à n et m éléments possède $n \times m$ éléments.

p-listes *vs.* sous-ensembles à p éléments

A est un ensemble.

∘ Une p-liste d'éléments de A est une suite ordonnée à p éléments pris parmi les éléments de A.

∘ Un sous-ensemble à p éléments de A est un ensemble de cardinal p dont les éléments sont pris dans A.

Exemple.

Les 3-listes d'éléments de $A = \{a; b; c; d\}$ sont : $(a; b; c)$, $(b; a; c)$, $(c; b; a)$, $(a; a; c)$, etc. Ce sont toutes les suites de trois lettres que l'on peut former avec les éléments de A en autorisant les répétitions de lettres.

Le sous-ensembles à trois éléments de A sont : $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{d; b; c\}$, $\{a; d; c\}$. Il en existe quatre seulement.

Exercice. La classe de M. Li compte cinq étudiants. Quelle sont les possibilités :
- de choisir simultanément trois étudiants pour les envoyer au tableau ?
- de choisir successivement trois étudiants pour les envoyer au tableau ?

Propriété.

Nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments : n^p

Nombre de sous-ensembles à p-éléments d'un ensemble à n éléments : $\binom{n}{p}$ (Slide 27)

Ensembles de nombres

Le tableau suivant rappelle les différents ensembles de nombres.

nombres	*exemple*	*ensemble*
entiers naturels	0 ; 1 ; 2 ; 3	$\mathbb{N}$
entiers relatifs	0 ; -1 ; -2 ; -3 ; 1 ; 2 ; 3	$\mathbb{Z}$
décimaux	$3,2$; $1,7$; $-1,9$; $-5/2$; 2	$\mathbb{D}$
rationnels	$-10/7$; $1,232323\dots$; $2,7$; -4	$\mathbb{Q}$
réels	π ; e ; $\sqrt{2}$; $15/11$; $-1,8$	$\mathbb{R}$
complexes	i ; $e^{2i\pi/3}$; $\{x; x^2+x+1=0\}$	$\mathbb{C}$

Ces ensembles sont emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Pour reconnaître ...

un entier relatif : sa valeur absolue est un entier naturel

un décimal : c'est le quotient d'un entier relatif et d'une une puissance de 10

un rationnel : il s'écrit comme une fraction de deux entiers relatifs

un réel : il existe une suite convergente de rationnels dont il est la limite

un complexe : il annule un polynôme de degré deux à coefficients réels

Exercice. Déterminez : un complexe qui n'est pas réel, un réel qui n'est pas rationnel, un rationnel qui n'est pas décimal, etc.

Outline

Le symbole $\sum$

Une somme finie de termes : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ peut s'écrire : $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

∘ Propriétés du symbole Σ.

α est un réel, (u_n) et (v_n) deux suites de nombres.

$\sum_{i=1}^{n}(\alpha u_i + v_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i$ et $\forall r \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1+r}^{n+r} u_{i-r}$.

∘ Illustration.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(i^2 + 2/i) &= (1^2 + 2/1) + (2^2 + 2/2) + (3^2 + 2/3)\\ &= (1^2 + 2^2 + 3^3) + 2 \times (1/1 + 1/2 + 1/3) = \sum_{i=1}^{3} i^2 + 2\sum_{i=1}^{3} 1/i\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = (4-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 = \sum_{i=4}^{6}(i-3)^2$$

∘ Exercice.

Ecrivez les sommes suivantes avec le signe $\sum$ et déterminez leur valeur avec R.

∘ $4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{k=2}^{6} 2k = 40$. R:> `sum(2*(2:6))`

∘ $4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + 7 \times 9 = \sum_{k=4}^{7} k(k+2) = 170$. R:> `sum((4:7)*(6:9))`

∘ $2/1 + 3/2 + 4/3 + 5/4 + \cdots + 15/14 = \sum_{k=2}^{15} k/(k-1) \approx 17,25$. R:> `sum((2:15)/((2:15)-1))`

∘ $-1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/80 - 1/81 = \sum_{k=1}^{81}(-1)^k/k \approx -0,7$. R:> `sum((-1)^(1:81)/(1:81))`

Le symbole $\prod$

Un produit fini de facteurs : $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ peut s'écrire : $\prod_{i=1}^{n} u_i$.

∘ Propriétés du symbole $\prod$.

α est un réel, (u_n) une suite de nombres.

$\prod_{i=1}^{n}(\alpha u_i) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} u_i$ et $\forall r \in \mathbb{N}$: $\prod_{i=1}^{n} u_i = \prod_{i=1+r}^{n+r} u_{i-r}$.

∘ Illustration.

$\prod_{i=1}^{3}(5e^i) = (5e^1) \times (5e^2) \times (5e^3) = 5^3(e^1 \times e^2 \times e^3) = 5^3 \times \prod_{i=1}^{3} e^i$

∘ Exercice.

Ecrivez les produits suivants avec le symbole $\prod$ et déterminez leur valeur avec R.

∘ $\ln 3 \times \ln 4 \times \ldots \ln 10 = \prod_{k=3}^{10} \ln k \approx 89,9$. R:> `prod(log(3:10))`

∘ $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \cdots \times \sqrt{11} = \prod_{k=1}^{5} \sqrt{2k+1} \approx 101,9$. R:> `prod(sqrt(2*(1:5)+1))`

∘ Exercice.

Justifiez que pour tout entier $n \geq 1$: $\prod_{k=1}^{n} k/(k+1) = 1/(n+1)$

Factorielles

La factorielle d'un entier n positif non nul est le produit de tous les entiers strictement positifs qui le précèdent : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. Et par convention : $0! = 1$.

Interprétation : $n!$ est le nombre de n-listes sans répétitions d'un ensemble à n éléments. Ou encore : c'est le nombre de mots de n lettres que l'on peut écrire avec un alphabet de n lettres en utilisant chaque lettre une et une seule fois.

Exemple.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$: on peut écrire 24 mots de quatre lettres avec les lettres a, b c, d si l'on exclut les mots dans lesquels une lettre est répétée.

Sous R la factorielle d'un entier s'obtient avec la fonction `factorial()`. Par exemple : `factorial(5)` donne : $5! = 120$.

Exercice. Simplifiez les expressions suivantes : $(n+1)!/(n-1)!$, $(2n+1)!/(2n-1)!$, $1/n! - 1/(n+1)!$.

Exercice. Montrez que si $r, n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq r < n$, alors : $n! = (\prod_{i=1}^{r} i)(\prod_{i=1}^{n-r}(r+i))$. Déduisez-en : $n!/r! = \prod_{i=1}^{n-r}(r+i)$

Exercice. Quels sont les entiers n vérifiant : $(n+1)! = 6(n-1)!$?

Coefficients binomiaux

k et n sont deux entiers tels que : $0 \leq k \leq n$; on note : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$.

Interprétation.

$\binom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Par exemple : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}) \times (2 \times 1)} = 20/2 = 10$: un ensemble à 5 éléments possède 10 sous-ensembles à 2 éléments.

Sous R : $\binom{5}{2}$ s'obtient par : `choose(5,2)`.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont des entiers qu'on appelle les **coefficients binomiaux**.

Pourquoi ce nom ? Considérons deux réels a et b et développons :

$(a+b)^0 =$	$1a^0b^0$					Ligne 0
$(a+b)^1 =$	$1a^1b^0$	$+ 1a^0b^1$				Ligne 1
$(a+b)^2 =$	$1a^2b^0$	$+ 2a^1b^1$	$+ 1a^0b^2$			Ligne 2
$(a+b)^3 =$	$1a^3b^0$	$+ 3a^2b^1$	$+ 3a^1b^2$	$+ 1a^0b^3$		Ligne 3
$(a+b)^4 =$	$1a^4b^0$	$+ 4a^3b^1$	$+ 6a^2b^2$	$+ 4a^1b^3$	$+ 1a^0b^4$	Ligne 4
...	Col.0	Col.1	Col.2	Col.3	Col.4	

Le coefficient à l'intersection de Ligne 4 et Col. 3 est : 4 et $\binom{4}{3} = 4!/(3! \times 1!) = 4$.

N'importe quel coefficient à l'intersection de la ligne n et de la colonne k est : $\binom{n}{k}$.

Propriétés. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Références

Dodge, Y.
Mathématiques de base pour économistes.
Springer Science & Business Media, 2007.

Michel, P.
Cours de mathématiques pour économistes.
Editions economica, 1989.

Rossignol, S.
Mathématiques en économie-gestion.
Dunod, 2018.

Sydsaeter, K., Hammond, P. J., Strøm, A., and Citta, M.
Mathématiques pour l'économie.
Pearson, 2014.