

Chapitre 4 – Suites Numériques – TD Feuille 2

Exercice 1. (*suites arithmétiques*)

- $u_0 = 6, u_1 = 4$ sont les deux premiers termes d'une suite arithmétique ; déterminez :
 - le terme de rang 7,
 - le septième terme,
 - la somme des sept premiers termes,
 - la somme des termes du rang 2 au rang 9.
- Cette suite est-elle : (a) convergente, (b) monotone, (c) majorée, (d) minorée ?
- Léa gagne six euros au jeu, puis elle gagne chaque jour deux euros de moins que la veille (un gain négatif est une perte). Quelle est la valeur nette de ses gains après sept jours de jeu ?

Exercice 2. (*suites géométriques*)

- $v_0 = 500, v_1 = 550$ sont les deux premiers termes d'une suite géométrique ; déterminez :
 - le terme de rang 6,
 - la somme des six premiers termes,
 - la somme des termes du rang 2 au rang 7.
- Cette suite est-elle : (a) convergente, (b) monotone, (c) majorée, (d) minorée ?
- Quelle est la taille après cinq ans d'un village de cinq cents habitants dont l'effectif croît chaque année de 10% ?
- Après combien d'années le village dépasse-t-il 1200 habitants ?

Exercice 3. (*suites géométriques*)

La suite (u_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-0,5)^n$.

- Est-elle géométrique ?
- Est-elle arithmétique ?
- Est-elle monotone ?
- Est-elle majorée ? minorée ?
- Converge-t-elle ?
- Au delà de quel rang ses termes sont-ils entre $\pm 1/100$?

Exercice 4. (*suites bornées, monotones, convergentes*)

Donnez un exemple (différent de celui de Feuille 1) :

- de suite non monotone,
- de suite majorée mais pas minorée,
- de suite bornée mais pas convergente,
- de suite convergente mais pas monotone,
- de suite non bornée,
- de suite convergente et majorée par sa limite,
- de suite convergente mais pas majorée par sa limite,
- de suite strictement croissante et bornée,
- de suite alternée, non majorée, ni minorée.
- de suite alternée, convergente.

Exercice 5. (*suites arithmético-géométriques*)

(v_n) est définie par : $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = 2v_n - 3$.

- Représentez les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
 - Conjecturez la monotonie de la suite (v_n) .
 - Conjecturez la convergence de (v_n) .
- Exprimez v_n en fonction de n .
 - Montrez que (v_n) est monotone.
 - Montrez que (v_n) diverge.
- Existe-t-il une valeur de v_0 pour laquelle (v_n) est croissante ?
- Imaginez un problème économique que la suite (v_n) modélise.

Exercice 6. (*suites explicites vs. récursives*)

Chacune des suites proposées est-elle bornée ? monotone ? convergente ?

- (a) $u_n = (-2n + 1)/(n + 1)$ (d) $x_0 = 0,5$ et $x_{n+1} = x_n^2; n \in \mathbb{N}$
 (b) $v_n = n + (-1)^n$ (e) $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = \ln(1 + y_n); n \in \mathbb{N}$
 (c) $w_n = e^{1+1/n}$ (f) $z_0 = -1$ et $z_{n+1} = e^{-z_n}; n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. (*limites de suites*)

Déterminez les limites suivantes.

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n/\sqrt{1+n}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2^n)/(1 + 3^n)$
 b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$

Exercice 8. (*suites adjacentes*)

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies pour $n \geq 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$ et $v_n = u_n + 1/n$.

- Montrez que (u_n) et (v_n) sont monotones.
- Montrez que leur différence tend vers 0.
- Montrez que ces deux suites convergent vers la même limite.
- Donnez une valeur approchée au centième de leur limite commune.

Exercice 9. (*intérêts simples, intérêts composés*)

Vous souhaitez placer 10 k€ pour onze ans au plus. Trois placements sont proposés :

placement	intérêts	taux
A	composés	5%
B	simples	7% pendant cinq ans, puis 5% pendant six ans
C	simples	6%

- Exprimez dans chacun des cas, le capital acquis après n années ($0 \leq n \leq 11$).
- Déterminez graphiquement le meilleur placement selon la durée.
- Quelles durées conduisent à choisir C plutôt que B ?

Exercice 10. (*annuités, actualisation, taux interne de rentabilité*)

- Quelle est la valeur actuelle d'une annuité de 1000 € versée en début de période pendant quatre ans si le taux d'actualisation est 5% ?
- Combien d'annuités de 20 k€ valent actuellement, dans leur ensemble, 218 k€ si le taux d'actualisation est 5% ?
- Bob investit 1000 € dont il tire un bénéfice constant de 200 € pendant sept ans, versé à la date anniversaire de l'investissement.
 - Le taux d'actualisation est : 10%.
 - Déterminez la valeur actuelle du flux de trésorerie selon l'année.
 - Déterminez la Valeur Actuelle Nette (VAN) de l'investissement.
 - Quelle devrait être la durée de la rente pour que la VAN soit positive ?
 - Déterminez et interprétez le Taux Interne de Rentabilité (TIR) de l'investissement.