

Chapitre 3 – Fonctions : Dérivation – TD Feuille 2

Exercice 1. (continuité, dérivabilité)

Chacune des fonctions suivantes est-elle continue ? dérivable ?

a) $f(x) = (x^2 - 1) \times \mathbb{1}_{]-1;1[}(x)$

b) $f(x) = x \times \mathbb{1}_{]0;1[}(x) + \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$

Exercice 2. (limite d'un taux d'accroissement, nombre dérivé)

Déterminez et interprétez les limites suivantes.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} (e^{2h} - 1)/h$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} (2^h - 1)/h$

c) $\lim_{h \rightarrow 1} \ln h / (h - 1)$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h/x)/h; x \neq 0$

Exercice 3. (dérivées de référence, dérivées et opérations)

Répondez aux questionnaires suivants (rangés par difficulté croissante). Vérifiez vos réponses avec Maxima^a.

a) <https://forms.gle/8XJRvqFa4MSc5a9g9>

c) <https://forms.gle/WnlyhiKUpB6efW9z8>

b) <https://forms.gle/p7KnqMS6LqXLQKcXA>

d) <https://forms.gle/9EU1AB6TZNPwdeb67>

Exercice 4. (dérivée d'une composée)

On note $f : x \mapsto x^2 + 1$, $g : x \mapsto \ln x$, $h : x \mapsto e^x$.

Déterminez toutes les composées possibles de deux fonctions parmi f , g , h ainsi que leurs dérivées^b.

Exercice 5. (courbe et tangente, coût marginal, coût moyen)

Produire x hL de bière coûte $\gamma(x) = \ln(1 + x^2)$ unités monétaires.

a) Quelle est la fonction dérivée de γ ?

b) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de γ au point d'abscisse 2 ?

c) Déterminez et interprétez le coût de production marginal en 2.

d) Combien coûte la production d'un hectolitre supplémentaire quand deux hectolitres ont déjà été produites ?

e) Quand on produit trois hectolitres, quel est le coût moyen de production d'un hectolitre ?

f) Déterminez et interprétez le coût de production marginal en 3.

Exercice 6. (capitalisation et approximation affine)

1. On place un capital K au taux annuel $p\%$; quel montant $K(t)$ détient-on après t années ?

2. Montrez que $\ln K(t) = \ln K + t \ln(1 + p/100)$.

3. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1 + x)$ au point d'abscisse 0 ?

4. Montrez que $\ln K(t) \approx \ln K + pt/100$.

Exercice 7. (dérivées et monotonie)

Quelle est la monotonie des fonctions suivantes ?

a) $f : x \mapsto x^3/3 + x^2/2 - 6x + 1$

c) $h : x \mapsto x^2 e^x$

b) $g : x \mapsto x^2 \ln x$

d) $r : x \mapsto \ln x / x^2$

A. Lourme & O. Baron, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux

^aMaxima est un logiciel gratuit de calcul formel ; vous pouvez le télécharger sous : <http://maxima.sourceforge.net/download.html> ou l'utiliser en ligne : <https://www.rollapp.com/app/maxima>

^ben utilisant la formule de dérivation des fonctions composées

Exercice 8. (*fonctions quadratiques*)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$.

1. En quels points la fonction f s'annule-t-elle ?
2. Exprimez $f(x)$ comme un produit de polynômes de degré un en x .
3. Etudiez les variations de f .
4. Quel est l'ensemble image de f ?
5. f atteint-t-elle un minimum ? un maximum ?

Exercice 9. (*dérivées et monotonie*)

La valeur du stock mondial de brut l'instant t est : $v = 1/e^t$ unités monétaires et le stock représente : $q = 1/\sqrt{t}$ unités de volume.

1. Quel est le prix de l'unité de volume à l'instant t ?
2. Comment ce prix varie-t-il avec le temps ?

La valeur du stock mondial de brut l'instant t dans une unité monétaire alternative est : $v = 1/e^{2t}$.

3. Etudiez, dans cette nouvelle unité monétaire, les variations du prix de l'unité de volume de brut.

Exercice 10. (*élasticités*)

1. Déterminez et interprétez l'élasticité en 1 de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 2x - 1$ b) $x \mapsto x^2$ c) $x \mapsto 2^x$ d) $x \mapsto 2\sqrt{x}$ e) $x \mapsto x^2 + x$

2. John dispose d'un stock de cuivre dont la valeur et le volume varient dans le temps. La valeur à l'instant t est : $v(t) = t$ unités monétaires et le volume : $q(t) = e^{-0,1t}$ unités de masse.
 - (a) Quel est le prix p de l'unité de masse de cuivre à l'instant t ?
 - (b) Déterminez l'élasticité de p par rapport à t .
 - (c) Vérifiez : $\text{El}_t p(t) = \text{El}_t v(t) - \text{El}_t q(t)$ et interprétez cette égalité.
-