

Chapitre 3 – Fonctions : Dérivation – TD Feuille 1

Exercice 1. (continuité, dérivabilité)

1. Chaque fonction de Fig. 1a, Fig. 1b, Fig. 1c, Fig. 1d est-elle : définie en 1 ? continue en 1 ? dérivable en 1 ?

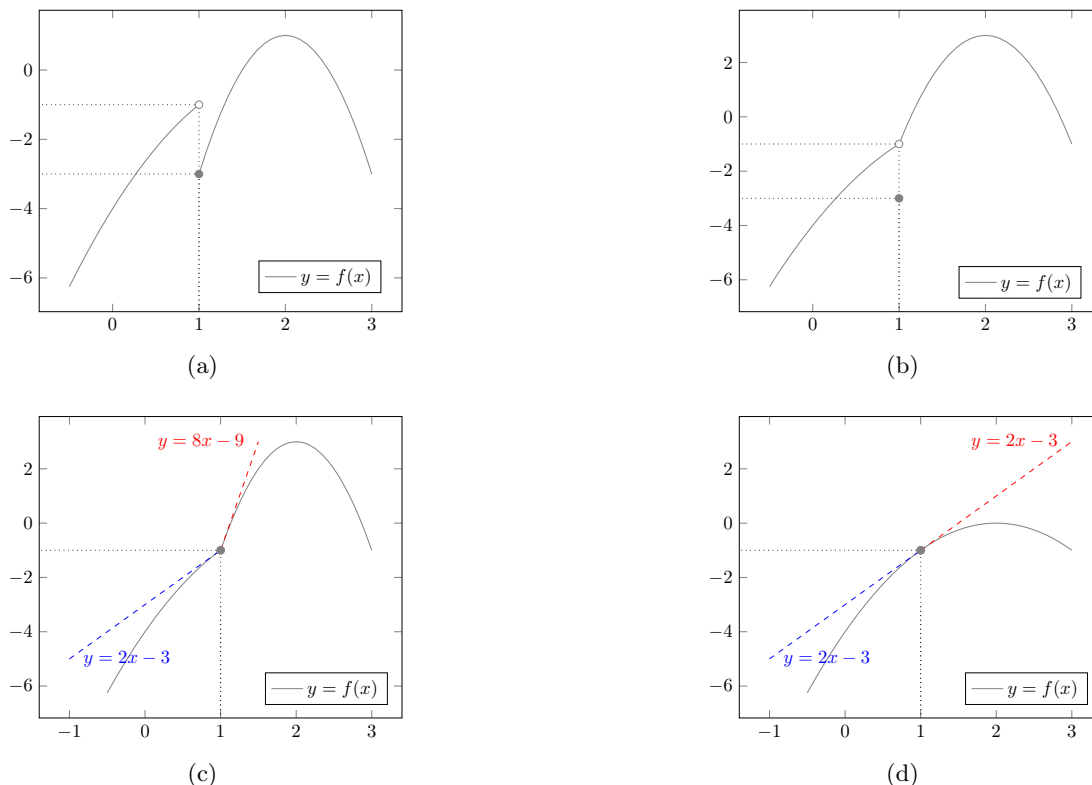


Fig. 1

◦ Fig. 1a.

f est définie en 1 et sa valeur en 1 est -3 . La limite de f en 1 à gauche existe et vaut -1 ; la limite de f en 1 à droite existe et vaut -3 . La limite de f en 1 à gauche et la limite de f en 1 à droite ne coïncident pas ; donc f ne possède pas de limite en 1. Comme la valeur de f en 1 ne coïncide pas avec la limite de f en 1, f n'est pas continue en 1. Puisque f n'est pas continue en 1, elle n'est pas non plus dérivable en 1.

◦ Fig. 1b.

f est définie en 1 et sa valeur en 1 est -3 . La limite de f en 1 à gauche existe et vaut -1 ; la limite de f en 1 à droite existe et vaut aussi -1 . Comme les limites de f en 1 à gauche et à droite existent et coïncident, f admet une limite en 1 ; cette limite vaut -1 . La valeur de f en 1 n'est pas égale à sa limite en 1. Donc f n'est pas continue en 1 ; elle n'est donc pas non plus dérivable en 1.

◦ Fig. 1c.

f est définie en 1 et sa valeur en 1 est -1 . La limite de f en 1 à gauche existe et vaut -1 ; la limite de f en 1 à droite existe et vaut aussi -1 . Comme les limites de f en 1 à gauche et à droite existent et coïncident, f admet une limite en 1 ; cette limite vaut -1 . La valeur de f en 1 est égale à sa limite en 1. Donc f est continue en 1. La limite du taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ vaut 2 quand h tend vers 0^- et 8 quand h tend vers 0^+ . Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ n'a pas de limite quand h tend vers 0 : f n'est donc pas dérivable en 1.

◦ Fig. 1d.

f est définie en 1 et sa valeur en 1 est -1 . La limite de f en 1 à gauche existe et vaut -1 ; la limite de f en 1 à droite existe et vaut aussi -1 . Comme les limites de f en 1 à gauche et à droite existent et coïncident, f admet une limite en 1 ; cette limite vaut -1 . La valeur de f en 1 est égale à sa limite en 1. Donc f est continue en 1. La limite du taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ vaut 2 quand h tend vers 0^- et 2 quand h tend vers 0^+ . Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ tend vers 2 quand h tend vers 0 : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

2. La fonction définie par $g(x) = (0, 5x - 2) \times \mathbb{1}_{]2; +\infty[}(x) - 0, 5 \times \mathbb{1}_{]-\infty; 2]}(x)$ est-elle continue ? dérivable ?

g peut être définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -0, 5x & \text{si } x \leq 2 \\ 0, 5x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Fig. 2 représentant g indique : g est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et non dérivable en 2.

◦ *Continuité en 2.* $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -0, 5x = -1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (0, 5x - 2) = -1$. Les limites de g à gauche et à droite de 2 existent et coïncident ; donc, la limite de g en 2 existe et vaut -1 . La valeur de g en 2 est : $g(2) = -0, 5 \times 2 = -1$. Ainsi, la limite de g en 2 coïncide avec sa valeur en 2 ; donc, g est continue en 2.

◦ *Dérivabilité en 2.* Le taux d'accroissement de g entre 2 et $2 + h$ est :

$$\tau_{2;2+h}(g) = (g(2+h) - g(2))/h = \begin{cases} (-0, 5(2+h) - (-1))/h = -0, 5 & \text{si } h \leq 0 \\ (0, 5(2+h) - 2 - (-1))/h = 0, 5 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \tau_{2;2+h}(g) = -0, 5 \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \tau_{2;2+h}(g) = 0, 5.$$

Les limites de $\tau_{2;2+h}(g)$ à gauche et à droite de 0 ne coïncident pas ; le taux d'accroissement de g entre 2 et $2 + h$ n'a pas de limite et g n'est pas dérivable en 2.

◦ *Régularité (continuité & dérivabilité) sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.*

Sur $] - \infty; 2[$: g coïncide avec une fonction continue et dérivable : $x \mapsto -0, 5x$; g est donc continue et dérivable.

Sur $]2; +\infty[$: g coïncide avec une fonction continue et dérivable : $x \mapsto 0, 5x - 2$; g est donc continue et dérivable.

Ainsi, g est continue et dérivable en tout point de $] - \infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

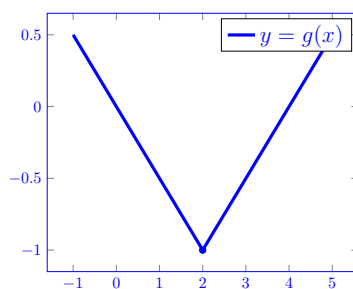


Fig. 2

Exercice 2. (limite d'un taux d'accroissement, nombre dérivé)

Déterminez et interprétez les limites suivantes.

$$\text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} (1/(1+h) - 1)/h \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{1+h} - 1)/h \quad \text{c) } \lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h \quad \text{d) } \lim_{h \rightarrow 0} (e^{x+h} - e^x)/h$$

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{1 - (1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h} \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} (1/(1+h) - 1)/h = \lim_{h \rightarrow 0} -1/(1+h) = -1.$$

$(1/(1+h) - 1)/h$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto 1/(1+x)$ entre 0 et h . Ainsi, $x \mapsto 1/(1+x)$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé est : -1 .

b) $\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{1+h} - 1)/h$ est une forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent vers 0). L'indétermination est levée en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur :

$$\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{\sqrt{1+h}^2 - 1^2}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{1+h} - 1)/h = 2 ; \text{ ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = 1/2.$$

$(\sqrt{1+h} - 1)/h$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ entre 0 et h ; ainsi, on a montré que $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 et que son nombre dérivé est $1/2$.

c) $(e^h - 1)/h$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto e^x$ entre 0 et h . Or, $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé est 1. Donc : $\lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h = 1$.

$$\text{d) } (e^{x+h} - e^x)/h = (e^x \times e^h - e^x)/h = e^x(e^h - 1)/h. \text{ Or, } \lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h = 1. \text{ Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} (e^{x+h} - e^x)/h = \lim_{h \rightarrow 0} e^x(e^h - 1)/h = e^x.$$

$(e^{x+h} - e^x)/h$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto e^x$ entre x et $x + h$; ainsi, on a montré que $x \mapsto e^x$ est dérivable en tout réel x et que son nombre dérivé en x est e^x .

Exercice 3. (dérivées de référence, dérivées et opérations)

Déterminez la dérivée de chacune des fonctions suivantes puis vérifiez vos résultats sous Maxima^a.

- $x \mapsto 3\sqrt{x}$
 - $x \mapsto 5x^2$
 - $x \mapsto 2/x$
 - $x \mapsto e^{2x}$
 - $x \mapsto \ln(3x)$
 - $x \mapsto 4^x$
 - $(3\sqrt{x})' = 3 \times (\sqrt{x})' = 3 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1,5/\sqrt{x}$
 - $(5x^2)' = 5 \times (x^2)' = 5 \times 2x = 10x$
 - $(2/x)' = 2 \times (1/x)' = 2 \times (-1/x^2) = -2/x^2$
 - $(e^{2x})' = (2x)'e^{2x} = 2e^{2x}$
 - $(\ln(3x))' = (3x)'/(3x) = 3/(3x) = 1/x$
 - $(4^x)' = (e^{x \ln 4})' = \ln 4 \times e^{x \ln 4} = 2 \ln 2 \times 4^x$
- $x \mapsto \sqrt{x} + 5/x$
 - $x \mapsto 2x + 5 + e^{-x}$
 - $x \mapsto \ln(2x) - 4^x$
 - $x \mapsto 1 + x - \sqrt{x}$
 - $x \mapsto \sum_{i=1}^5 e^{ix}$
 - $(\sqrt{x} + 5/x)' = (\sqrt{x})' + (5/x)' = 1/(2\sqrt{x}) + 5 \times (-1/x^2) = 0,5/\sqrt{x} - 5/x^2$
 - $(2x + 5 + e^{-x})' = (2x + 5)' + (e^{-x})' = 2 - e^{-x}$
 - $(\ln(2x) - 4^x)' = (\ln(2x))' - (4^x)' = 1/x - 2 \ln 2 \times 4^x$
 - $(1 + x - \sqrt{x})' = (1 + x)' - (\sqrt{x})' = 1 - 0,5/\sqrt{x}$
 - $(\sum_{i=1}^5 e^{ix})' = \sum_{i=1}^5 (e^{ix})' = \sum_{i=1}^5 i \times e^{ix}$
- $x \mapsto 2x\sqrt{x}$
 - $x \mapsto (2x + 1)e^{-x}$
 - $x \mapsto 2^x \ln(x)$
 - $x \mapsto e^{-x} \ln(1/x)$
 - $x \mapsto 3^x e^{2x}$
 - $(2x\sqrt{x})' = (2x)' \sqrt{x} + (2x)(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x} + 2x/(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + x/\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$
 - $((2x + 1)e^{-x})' = (2x + 1)'e^{-x} + (2x + 1)(e^{-x})' = 2e^{-x} + (2x + 1) \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x}(2 - (2x + 1)) = e^{-x} \times (1 - 2x)$

Sous Maxima :

```
(%i1) factor(diff((2*x+1)*exp(-x), x));
```

$$-x \quad - \quad (2x - 1) \quad \%e$$

(c) $(2^x \ln(x))' = (2^x)' \ln x + (2^x)(\ln x)' = \ln 2 \times 2^x \times \ln x + 2^x \times (1/x) = 2^x(\ln 2 \times \ln x + 1/x)$

Sous Maxima :

```
(%i2) factor(diff(2^x*log(x), x));
```

$$\frac{x \quad 2 \quad (1 + \log(2) \times \log(x))}{x}$$

(d) $(e^x \ln(1/x))' = (-e^x \ln x)' = -(e^x)' \ln x - e^x(\ln x)' = -e^x \ln x - e^x/x = -e^x(\ln x + 1/x)$

Sous Maxima :

```
(%i3) factor(diff(exp(x)*log(1/x), x));
```

$$\frac{x \quad \%e \quad (1 + x \log(x))}{x}$$

(e) $(3^x e^{2x})' = (3^x)' e^{2x} + 3^x (e^{2x})' = \ln 3 \times 3^x e^{2x} + 3^x \times 2e^{2x} = 3^x e^{2x}(2 + \ln 3)$

- $x \mapsto (1 + \sqrt{x})/(2x)$
 - $x \mapsto e^{2x}/(x + 1)$
 - $x \mapsto (x^2 + x + 1)/(2x + 1)$
 - $x \mapsto e^x/\ln(x)$
 - $x \mapsto (x + e^{2x})/\sqrt{x}$
 - $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2x}\right)' = \frac{(1+\sqrt{x})' \times (2x) - (1+\sqrt{x}) \times (2x)'}{(2x)^2} = \frac{(1/(2\sqrt{x})) \times 2x - 2(1+\sqrt{x})}{4x^2} = \frac{\sqrt{x} - 2 - 2\sqrt{x}}{4x^2} = -(\sqrt{x} + 2)/(4x^2)$
 - $\left(\frac{e^{2x}}{x+1}\right)' = \frac{(e^{2x})'(x+1) - e^{2x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}}{(x+1)^2} = e^{2x}(2x+1)/(x+1)^2$
 - $\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right)' = \frac{(x^2+x+1)'(2x+1) - (x^2+x+1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)(2x+1) - (x^2+x+1) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$
 - $\left(\frac{e^x}{\ln x}\right)' = \frac{(e^x)'(\ln x) - (e^x)(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{e^x \ln x - e^x/x}{(\ln x)^2} = e^x(\ln x - 1/x)/(\ln x)^2$
 - $\left(\frac{x+e^{2x}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+e^{2x})'(\sqrt{x}) - (x+e^{2x})(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = \frac{(1+2e^{2x})\sqrt{x} - (x+e^{2x})/(2\sqrt{x})}{x} = \frac{2x(1+2e^{2x})/(2\sqrt{x}) - (x+e^{2x})/(2\sqrt{x})}{x} = \frac{x+e^{2x}(4x-1)}{2x\sqrt{x}}$

^aMaxima est un logiciel gratuit de calcul formel ; vous pouvez le télécharger sous : <http://maxima.sourceforge.net/download.html> ou l'utiliser en ligne : <https://www.rollapp.com/app/maxima>

Exercice 4. (dérivée d'une composée)

On note $f : x \mapsto 2x + 5$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 1/x$.

Déterminez toutes les composées possibles de deux fonctions parmi f , g , h ainsi que leurs dérivées^b.

$$(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x} + 5.$$

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \times g'(x) = 2 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x + 5}.$$

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x) = 1/(2\sqrt{2x + 5}) \times 2 = 1/\sqrt{2x + 5}.$$

$$(f \circ h)(x) = 2/x + 5.$$

$$(f \circ h)'(x) = (f' \circ h)(x) \times h'(x) = 2 \times (-1/x^2) = -2/x^2.$$

$$(h \circ f)(x) = 1/(2x + 5).$$

$$(h \circ f)'(x) = (h' \circ f)(x) \times f'(x) = (-1/(2x + 5)^2) \times 2 = -2/(2x + 5)^2.$$

$$(h \circ g)(x) = 1/\sqrt{x}.$$

$$(h \circ g)'(x) = (h' \circ g)(x) \times g'(x) = -1/(\sqrt{x})^2 \times 1/(2\sqrt{x}) = -1/(2x\sqrt{x}).$$

$$(g \circ h)(x) = \sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x} = h \circ g(x).$$

$$(g \circ h)'(x) = (g' \circ h)(x) \times h'(x) = (1/(2 \times \sqrt{1/x})) \times (-1/x^2) = -\sqrt{x}/(2x^2) = -1/(2x\sqrt{x}).$$

Exercice 5. (courbe et tangente, coût marginal, coût moyen)

Produire x tonnes de blé coûte $\gamma(x) = 2 + x + x^2$ unités monétaires.

- a) Déterminez et interprétez le taux d'accroissement de γ entre 1 et 3.

$$\tau_{1;3}(\gamma) = (\gamma(3) - \gamma(1))/(3 - 1) = ((2 + 3 + 3^2) - (2 + 1 + 1^2))/2 = (14 - 4)/2 = 5.$$

Le taux d'accroissement de γ entre 1 et 3 vaut 5. C'est la pente de la corde rouge de Fig. 3. Chaque tonne de blé produite entre une tonne et trois tonnes coûte en moyenne 5 unités monétaires.

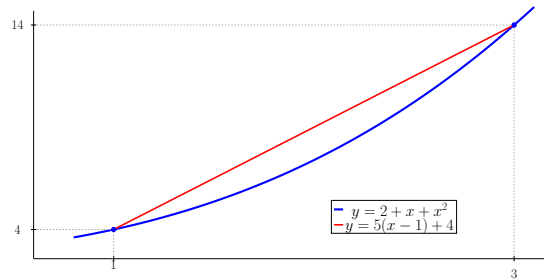


Fig. 3

- b) Quel est le taux d'accroissement $\tau_{1;1+h}(\gamma)$ de γ entre 1 et $1 + h$?

$$\tau_{1;1+h}(\gamma) = (\gamma(1 + h) - \gamma(1))/(1 + h - 1) = ((2 + (1 + h) + (1 + h)^2) - (2 + 1 + 1^2))/h = (3h + h^2)/h = 3 + h.$$

- c) Quelle est la limite de $\tau_{1;1+h}(\gamma)$ quand h tend vers 0 ?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{1;1+h}(\gamma) = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h) = 3.$$

- d) Quel est le nombre dérivé de la fonction γ en 1 ?

La limite du taux d'accroissement de γ entre 1 et $1 + h$ est le nombre dérivé de γ en 1. Ainsi, $\gamma'(1) = 3$.

- e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de γ au point d'abscisse 1 ?

$\gamma(1) = 4$, $\gamma'(1) = 3$. La tangente à la courbe de γ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 3(x - 1) + 4$.

- f) Déterminez et interprétez le coût de production marginal en 1.

Le coût de production marginal en 1 est : $\gamma'(1) = 3$: quand on a produit une tonne de blé, produire une tonne supplémentaire coûte approximativement trois unités monétaires.

- g) Combien coûte la production d'une tonne supplémentaire de blé quand une tonne a déjà été produite ?

$\gamma(2) - \gamma(1) = (2 + 2 + 2^2) - (2 + 1 + 1^2) = 4$: quand on a produit une tonne de blé, produire une tonne supplémentaire coûte exactement quatre unités monétaires (coût de surproduction). Rq. Le coût marginal est une approximation du coût de surproduction (Fig. 3).

^ben utilisant la formule de dérivation des fonctions composées

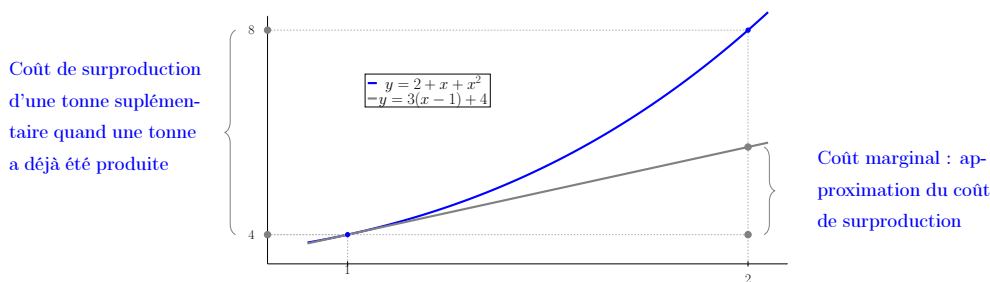


Fig. 4: *Coût marginal vs. coût de surproduction*

- h) Quand on produit deux tonnes, quel est le coût moyen de production d'une tonne de blé ?
 $\gamma(2)/2 = 4$: quand on a produit deux tonnes de blé, chaque tonne coûte en moyenne quatre unités monétaires.
- i) Quelle est la fonction dérivée de γ ?
 $\gamma'(x) = 1 + 2x$.
- j) Déterminez et interprétez le coût de production marginal en 2.
 $\gamma'(2) = 5$: quand on a produit deux tonnes de blé, produire une tonne supplémentaire coûte approximativement cinq unités monétaires.

Exercice 6. (*capitalisation et approximation affine*)

- On place un capital K au taux annuel $p\%$; quel montant $K(t)$ détient-on après t années ?
 La valeur acquise après t années d'un capital K placé au taux annuel $p\%$ est : $K(t) = K(1 + p/100)^t$.
- Montrez que $\ln K(t) = \ln K + t \ln(1 + p/100)$.
 $\ln K(t) = \ln(K(1 + p/100)^t) = \ln K + \ln((1 + p/100)^t) = \ln K + t \ln(1 + p/100)$.
- Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1 + x)$ au point d'abscisse 0 ?
 En notant $f(x) = \ln(1 + x)$: $f'(x) = 1/(1 + x)$; $f'(0) = 1/(1 + 0) = 1$; $f(0) = \ln(1 + 0) = 0$; la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; $y = x$.
- Montrez que $\ln K(t) \approx \ln K + pt/100$.
 D'après 3., l'approximation affine de $x \mapsto \ln(1 + x)$ au voisinage de 0 est $x \mapsto x$. Ainsi, quand x est proche de 0 : $\ln(1 + x) \approx x$. Donc, pour un taux p proche de 0 : $\ln(1 + p/100) \approx p/100$ et $\ln K + t \ln(1 + p/100) \approx \ln K + tp/100$.

Exercice 7. (*dérivées et monotonie*)

Quelle est la monotonie des fonctions suivantes ?

- a) $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x$ b) $g : x \mapsto x \ln x$ c) $h : x \mapsto xe^x$ d) $r : x \mapsto \ln x/x$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$. Le discriminant de $x^2 + x - 2$ vaut 9, ses racines sont : $(-1 - \sqrt{9})/2 = -2$ et $(-1 + \sqrt{9})/2 = 1$. Ainsi : $f'(x) = 6(x + 2)(x - 1)$. Le tableau suivant indique le signe de f' et les variations de f .

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$\text{var}(f)$	$-\infty$	20	-7	$+\infty$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et pour tout réel $x > 0$: $g'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \times \ln x + x \times 1/x = 1 + \ln x$. g' s'annule en un seul point : $1/e$. Le tableau suivant indique le signe de g' et les variations de g .

x	0	$1/e$	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+
$\text{var}(g)$	0	$\longrightarrow -1/e$	$\longrightarrow +\infty$

c) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $h'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$. h' s'annule en un seul point : -1 . Le tableau suivant indique le signe de h' et les variations de h .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
e^x	+		+
$1+x$	-	0	+
$h'(x)$	-	0	+
$\text{var}(h)$	0	$\longrightarrow -1/e$	$\longrightarrow +\infty$

d) r est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et pour tout réel $x > 0$: $r'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{x(\ln x)' - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{x \times 1/x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. r' s'annule en un seul point : e . Le tableau suivant indique le signe de r' et les variations de r .

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$	+	0	-
x^2	+		+
$r'(x)$	+	0	-
$\text{var}(r)$	$-\infty$	$\longrightarrow 1/e$	$\longrightarrow 0$

Exercice 8. (fonctions quadratiques)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

1. En quels points la fonction f s'annule-t-elle ?

$f(x) = 2(x^2 - 4x + 3)$. Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ vaut 4 ; ses racines : $(-4 - \sqrt{4})/2 = -3$ et $(-4 + \sqrt{4})/2 = -1$ sont aussi les zéros de f .

2. Exprimez $f(x)$ comme un produit de polynômes de degré un en x .

f est un polynôme de degré deux en x dont les racines sont : -1 et -3 ; donc : $f(x) = 2(x+1)(x+3)$.

3. Etudiez les variations de f .

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 4x - 8$. Sur l'intervalle $] -\infty; 2]$, f' est négative et f est décroissante ; sur l'intervalle $[2; +\infty[$, f' est positive et f est croissante. Le tableau suivant donne le signe de f' et les variations de f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	+
$\text{var}(f)$	$+\infty$	$\longrightarrow -2$	$\longrightarrow +\infty$

4. Quel est l'ensemble image de f ?

f est continue sur $\mathbb{R}$; elle prend donc toutes les valeurs comprises entre -2 et $+\infty$.

5. f atteint-elle un minimum ? un maximum ?

f prend la valeur -2 mais aucune valeur strictement inférieure à -2 . Ainsi, -2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Rq. Chacune des questions de cet exercice peut être traitée en invoquant quelques propriétés générales des fonctions polynômiales du second degré. En effet, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$), alors :

- (i) f n'admet aucune racine réelle si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement négatif ; f admet une racine unique : $-b/(2a)$ si $\Delta = 0$ et deux racines distinctes : $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ si $\Delta > 0$.
- (ii) f se factorise en : $f(x) = a(x - (-b - \sqrt{\Delta})/(2a))(x - (-b + \sqrt{\Delta})/(2a))$ si $\Delta > 0$ et $f(x) = a(x + b/(2a))^2$ si $\Delta = 0$.
- (iii) Si $a > 0$: f est décroissante entre $-\infty$ et $-b/(2a)$, croissante entre $-b/(2a)$ et $+\infty$, f atteint un minimum en $-b/(2a)$ et son ensemble image est $[f(-b/(2a)); +\infty[$. Si $a < 0$: f est croissante entre $-\infty$ et $-b/(2a)$, décroissante entre $-b/(2a)$ et $+\infty$, f atteint un maximum en $-b/(2a)$ et son ensemble image est $] -\infty; f(-b/(2a))]$.

Exercice 9. (*dérivées et monotonie*)

A l'instant t , le prix du baril de brut est : $p = t$ unités monétaires et le volume de brut détenu par Sam est : $q = e^{-t}$ barils.

1. Quelle est la valeur du stock de Sam à l'instant t ?

La valeur du stock à l'instant t est : $v(t) = p \times q = te^{-t}$.

2. Comment la valeur du stock de Sam varie-t-elle avec le temps ?

$v : t \mapsto te^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t : $v'(t) = (te^{-t})' = (t)'e^{-t} + t(e^{-t})' = 1 \times e^{-t} + t \times (-1) \times e^{-t} = e^{-t}(1-t)$. v' possède un seul point critique : 1 ; le tableau suivant indique le signe de v' et les variations de v sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	1	$+\infty$
e^{-t}	+		+
$1-t$	+	0	-
$v'(t)$	+	0	-
var(v)	$-\infty$	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

Comme t est une durée, l'étude des variations de v peut être restreinte à $\mathbb{R}^+$:

t	0	1	$+\infty$
e^{-t}	+		+
$1-t$	+	0	-
$v'(t)$	+	0	-
var(v)	0	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

La valeur du stock de Sam croît continument entre les instants 0 et 1, avant de décroître. Ainsi, elle est maximale à l'instant 1 où elle vaut $1/e$.

Le prix du baril à l'instant t dans une unité monétaire alternative est $p = t^2$.

3. Etudiez, dans cette nouvelle unité monétaire, les variations de la valeur du stock avec le temps.

$v : t \mapsto t^2e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t : $v'(t) = (t^2e^{-t})' = (t^2)'e^{-t} + t^2(e^{-t})' = 2t \times e^{-t} + t^2 \times (-1) \times e^{-t} = e^{-t}(2t - t^2) = t(2-t)e^{-t}$. v possède deux points critiques : 0 et 2 ; le tableau suivant indique le signe de v' et les variations de v sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	2	$+\infty$
e^{-t}	+		+	+
t	-	0	+	+
$2-t$	+		0	-
$v'(t)$	-	0	+	-
var(v)	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 4/e^2$	$\searrow 0$

La restriction de l'étude à $\mathbb{R}^+$ montre que la valeur du stock de Sam croît entre les instants 0 et 2 avant de décroître. La valeur du stock est maximale à l'instant 2 où elle vaut $4/e^2$.

Exercice 10. (*élasticités*)

1. Déterminez et interprétez l'élasticité en 1 de chacune des fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto 3x + 1$ b) $x \mapsto e^{2x}$ c) $x \mapsto 3x^{-3}$ d) $x \mapsto \sqrt{x}$ e) $x \mapsto 1/(x\sqrt{x})$

◦ L'élasticité de $f : x \mapsto 3x + 1$ en 1 est : $xf'(x)/f(x)|_{x=1} = 3x/(3x+1)|_{x=1} = 3/4 = 0,75$: quand la variable x augmente de 1% à partir de la valeur 1, la valeur de la fonction f augmente de 0,75% environ.

◦ L'élasticité de $g : x \mapsto e^{2x}$ en 1 est : $xg'(x)/g(x)|_{x=1} = 2xe^{2x}/e^{2x}|_{x=1} = 2$: quand la variable x augmente de 1% à partir de la valeur 1, la valeur de la fonction g augmente de 2% environ.

◦ L'élasticité de $h : x \mapsto 3x^{-3}$ en 1 est : $xh'(x)/h(x)|_{x=1} = x \times (-9)x^{-4}/(3x^{-3})|_{x=1} = -3$: quand la variable x augmente de 1% à partir de la valeur 1, la valeur de la fonction h diminue de 3% environ.

◦ L'élasticité de $u : x \mapsto \sqrt{x}$ en 1 est : $xu'(x)/u(x)|_{x=1} = x \times (1/2)x^{-1/2}/x^{1/2}|_{x=1} = 0,5$: quand la variable x augmente de 1% à partir de la valeur 1, la valeur de la fonction u augmente de 0,5% environ.

◦ L'élasticité de $v : x \mapsto 1/(x\sqrt{x})$ en 1 est : $xv'(x)/v(x)|_{x=1} = x \times (-3/2)x^{-5/2}/x^{-3/2}|_{x=1} = -1,5$: quand la variable x augmente de 1% à partir de la valeur 1, la valeur de la fonction v diminue de 1,5% environ.

2. A l'instant t , le prix du titre SA.Inc est $p(t) = 2e^{0,1t}$ et la quantité de titre SA.Inc détenue par M. Li est $q(t) = t$.

(a) Quelles est la valeur v du portefeuille de M. Li à l'instant t ?

La valeur du portefeuille de M. Li à l'instant t est $v(t) = p(t) \times q(t) = 2te^{0,1t}$.

(b) Déterminez l'élasticité de v par rapport à t .

La dérivée de v en t est $v'(t) = e^{0,1t}(0,1 \times 2t + 2) = e^{0,1t}(0,2t + 2)$.

L'élasticité de v en t est : $\text{El}_t v(t) = e^{0,1t}(0,2t^2 + 2t)/(2te^{0,1t}) = 0,1t + 1$.

(c) Vérifiez : $\text{El}_t v(t) = \text{El}_t p(t) + \text{El}_t q(t)$ et interprétez cette égalité.

$\text{El}_t p(t) = tp'(t)/p(t) = 0,2te^{0,1t}/(2e^{0,1t}) = 0,1t$.

$\text{El}_t q(t) = tq'(t)/q(t) = t/t = 1$.

Ainsi : $\text{El}_t p(t) + \text{El}_t q(t) = \text{El}_t v(t)$.