Chapitre 2 – Fonctions : Généralités – L'essentiel du cours

1. Définitions

Une fonction f associe à tout élément d'un ensemble A (de départ) au plus un élément d'un ensemble B (d'arrivée). Si f associe à chaque élément de A exactement un élément de B, f est une application de A dans B. Si f associe $y \in B$ à $x \in A$, y est l'image de x par f ou x est un antécédent de y ; on note : $y = f(x)$. Le domaine de la fonction $f : A \to B$ est composé des éléments de A possédant une image par f : $\mathscr{D}_f = \{x \in A; \exists y \in B, y = f(x)\}$. L'ensemble image de f est composé des images $f(x)$ obtenues quand la variable x décrit $\mathscr{D}_f$: $\{f(x); x \in \mathscr{D}_f\}$.

2. Fonctions de référence (Les fonctions suivantes dépendent d'une variable réelle.)

a) ***Fonctions affines***

Une fonction affine est du type $f : x \mapsto ax+b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Sa courbe est une droite de pente a, d'ordonnée à l'origine b. Si $a = 0$, f est constamment égale à b ; si $a \neq 0$, f s'annule en un seul point : $-b/a$. Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$, négative entre $-\infty$ et $-b/a$, positive entre $-b/a$ et $+\infty$. Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$, positive entre $-\infty$ et $-b/a$, négative entre $-b/a$ et $+\infty$. f est entièrement déterminée par les images de deux réels distincts. En effet, si $x_1 \neq x_2$ alors : $a = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ et $b = y_1 - ax_1$.

b) ***Fonctions affines par morceaux***

Une fonction est affine par morceaux quand son domaine est une réunion d'intervalles sur lesquels elle est affine. Sa courbe est alors une réunion de segments de droites.

Un cas particulier important : les fonctions indicatrices. La fonction indicatrice d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{1}_I$ prend pour valeur 1 sur l'intervalle I et 0 en dehors : $\mathbb{1}_I(x) = 1$ si $x \in I$; $\mathbb{1}_I(x) = 0$ si $x \notin I$.

c) ***Valeur absolue***

La valeur absolue d'un réel x est définie par : $|x| = x$ si $x \geq 0$; $|x| = -x$ si $x < 0$. L'application valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ (où elle coïncide avec $x \mapsto -x$), croissante sur $\mathbb{R}^+$ (où elle coïncide avec $x \mapsto x$) ; son ensemble image est $\mathbb{R}^+$. f est affine par morceaux, elle peut être définie par : $f(x) = x\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) - x\mathbb{1}_{]-\infty;0[}(x)$.

La distance entre deux nombres réels est la valeur absolue de leur différence : $|x - y| = \mathrm{dist}(x; y)$.

d) ***Exponentielle***

La fonction exponentielle est l'unique application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0. L'image de $x \in \mathbb{R}$ se note e^x ou $\exp(x)$. La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, son ensemble image est $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, sa limite en $-\infty$ vaut 0, sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Propriétés ($x, y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Q}$) : (i) $e^{x+y} = e^x e^y$ (ii) $e^{x-y} = e^x/e^y$ (iii) $e^{-x} = 1/e^x$ (iv) $(e^x)^p = e^{px}$.

e) ***Logarithme Népérien***

Tout réel strictement positif est l'image par la fonction exponentielle d'un unique réel. La fonction logarithme Népérien est l'application qui à tout $x > 0$ associe l'unique réel, noté $\ln(x)$, dont x est l'image par l'exponentielle. Ainsi, l'application $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$, elle vaut 0 en 1, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, sa limite en 0^+ vaut $-\infty$, sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Propriétés ($x, y \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$) : (i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (ii) $\ln(1/x) = -\ln x$ (iii) $\ln(x^p) = p\ln x$.

f) ***Puissances***

Une fonction puissance est du type $f : x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$). Sa définition, son domaine, etc. dépendent de α.

valeur de α	$\mathscr{D}_f$	*valeur de* $f(x)$	*monotonie*	*limites aux bornes de* $\mathscr{D}_f$
entier pair, positif	$\mathbb{R}$	$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ facteurs}}$	$\downarrow$ sur $\mathbb{R}^-$; $\uparrow$ sur $\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha = +\infty$
entier impair, positif	$\mathbb{R}$		$\uparrow$ sur $\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = -\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha = +\infty$
entier pair, négatif	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$	$\uparrow$ sur $]-\infty; 0[$; $\downarrow$ sur $]0; +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha = 0^{\mp}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = \lim\limits_{x\to0^-} x^\alpha = +\infty$
entier impair, négatif	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$		$\downarrow$ sur $]-\infty; 0[$; $\downarrow$ sur $]0; +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = -\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha = 0^+$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = -\lim\limits_{x\to0^-} x^\alpha = +\infty$
autres cas et $\alpha > 0$	$]0; +\infty[$	$x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$	$\uparrow$ sur $]0; +\infty[$	$\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0^{\mp}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$
autres cas et $\alpha < 0$			$\downarrow$ sur $]0; +\infty[$	$\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0^+$

Rq. $0 < x < 1$ et $\alpha > 0$: plus α est grand, plus x^α est petit ; $x > 1$ et $\alpha > 0$: plus α est grand, plus x^α est grand.

3. Fonctions et opérations

La somme de deux fonctions f et g est définie par : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, la différence par : $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, le produit par $(fg)(x) = f(x)g(x)$, le quotient par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ et la composée par : $f \circ g(x) = f(g(x))$. La somme, la différence, le produit sont définis sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$; le quotient est défini sur $\mathscr{D}_f \cap \{x \in \mathscr{D}_g; g(x) \neq 0\}$; la composée $f \circ g$ est définie sur $\mathscr{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathscr{D}_g; g(x) \in \mathscr{D}_f\}$. En général le produit de composition n'est pas

A. Lourme & O. Baron, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux

commutatif : $f \circ g \neq g \circ f$. Lorsque la composée de deux fonctions est l'identité : $\forall x \in \mathscr{D}_{f \circ g} : f(g(x)) = x$ et $\forall x \in \mathscr{D}_{g \circ f} : g(f(x)) = x$, les fonctions f et g sont dites réciproques. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ sont des fonctions réciproques, comme le sont : $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ restreinte à $\mathbb{R}^+$.

4. **D'une courbe à l'autre**

f et g sont deux fonctions ; leurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tracées dans un repère orthonormé.

◦ $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) si :
(i) $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à a : pour tout $h \in \mathbb{R}$, si $a + h \in \mathscr{D}_f$ alors $a - h \in \mathscr{D}_f$, et
(ii) deux réels de $\mathscr{D}_f$ symétriques par rapport à a ont toujours la même image : $a+h \in \mathscr{D}_f \Rightarrow f(a+h) = f(a-h)$.
Si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées), f est dite paire.

◦ $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(a; b)$ si :
(i) $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à a : pour tout $h \in \mathbb{R}$, si $a + h \in \mathscr{D}_f$ alors $a - h \in \mathscr{D}_f$, et
(ii) deux réels de $\mathscr{D}_f$ symétriques par rapport à a ont toujours des images symétriques par rapport à b : si $a+h \in \mathscr{D}_f$ alors $(f(a+h) + f(a-h))/2 = b$.
Si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $(0; 0)$ (origine), f est dite impaire.

◦ Si f et g sont réciproques, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

◦ Si g est définie par : $g(x) = f(x) + a$ ($a \in \mathbb{R}$), alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue en translatant $\mathscr{C}_f$ verticalement de a unités.

◦ Si g est définie par : $g(x) = f(x + a)$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue en translatant $\mathscr{C}_f$ horizontalement de $-a$ unités.

5. **Equations**

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation avec : valeur ablsolue/logarithme/exponentielle, etc. On peut cependant établir un canevas permettant de guider la résolution.

a) ***Equations et valeurs absolues***

Deux méthodes pour résoudre une équation avec valeur absolue :
Méthode 1 (analytique).
(i) isoler la valeur absolue (ii) disjoindre les cas (iii) résoudre les cas disjoints (iv) vérifier les solutions obtenues.
Méthode 2 (géométrique).
(i) isoler la valeur absolue (ii) faire apparaître la valeur absolue d'une différence (iii) interpréter la valeur absolue d'une différence comme une distance.

b) ***Equations et logarithmes***

(i) préciser les contraintes sur l'inconnue (ii) transformer l'équation sous la forme : $\ln A = \ln B$ (iii) déduire les solutions éventuelles de : $A = B$ (iv) vérifier une à une les solutions éventuelles.

c) ***Equations et exponentielles***

(i) transformer l'équation sous la forme : $\exp(A) = \exp(B)$ (iii) résoudre $A = B$.

d) ***Equations et puissances***

Si une équation implique une fonction puissance, on cherche à l'écrire : $A^\alpha = B$ où A est une expression dépendant de l'inconnue, $B \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. On exprime alors A en fonction de B et α selon le tableau suivant.

B	α ($\alpha \neq 0$)	A
$B = 0$	α non entier	$\times$
	α entier négatif	$\times$
	α entier positif	$A = 0$
$B < 0$	α non entier	$\times$
	α entier pair	$\times$
	α entier impair	$A = -(-B)^{1/\alpha}$
$B > 0$	α entier positif pair	$A = B^{1/\alpha}$ ou $-B^{1/\alpha}$
	autres cas	$A = B^{1/\alpha}$

e) ***Equations sans solution analytique***

Il arrive qu'une équation possède une solution établie par un théorème d'existence, mais sans expression explicite. Faute de mieux, on cherche alors une valeur approchée de la solution après avoir fait apparaître cette solution comme racine d'une fonction.

Exemple. Le théorème des valeurs intermédiaires[a] permet de montrer que l'équation $E : e^x = 1/x$ possède une solution unique entre 0 et $+\infty$. Hélas, cette solution ne possède pas d'expression explicite. En écrivant E sous la forme $e^x - 1/x = 0$ on observe que la solution de E est la valeur en laquelle la fonction $x \mapsto e^x - 1/x$ s'annule. Cette valeur peut être approchée par une fonction dédiée à la recherche des racines d'une fonction, comme `uniroot` sous R : `f <- function(x){exp(x)-1/x} ; uniroot(f,lower=0,upper=2)` root [1] 0.5671704. Ainsi, une valeur approchée de la solution de E est $0,57$.

[a]que vous étudierez au second semestre de L1 Science Eco.