

Chapitre 1 – Eléments de logique & Notations mathématiques - L'essentiel du cours

1. Calcul des propositions

Le calcul des propositions consiste à : (i) construire une proposition R dépendant de deux propositions P et Q (ii) donner une valeur de vérité à R selon les valeurs de vérité de P et Q . A quoi ça sert ?

Madame M. affirme : *Quand l'économie se porte bien et que les Français sont heureux, le Président est content.* Quelle serait l'affirmation contraire ? Le calcul des propositions permet de répondre facilement.

a) **Connecteurs logiques et vérité**

P et Q sont deux propositions.

P : *l'économie se porte bien*, Q : *les Français sont heureux*.

◦ Conjonction. La conjonction de P et Q se note : $P \wedge Q$ et se dit : P et Q .

$P \wedge Q$: *l'économie se porte bien et les Français sont heureux*.

$P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

Il suffit qu'un Français ne soit pas heureux pour que $P \wedge Q$ soit fausse.

◦ Disjonction. La disjonction de P et Q se note : $P \vee Q$ et se dit : P ou Q

$P \vee Q$: *l'économie se porte bien ou les Français sont heureux*.

$P \vee Q$ est vraie si et seulement si l'une des propositions : P ou Q est vraie.

Quand les Français sont heureux et que l'économie se porte mal, $P \vee Q$ est vraie.

◦ Négation. La négation de P se note : $\neg P$ et se dit : non P .

$\neg P$: *l'économie ne se porte pas bien*.

$\neg P$ est vraie quand P est fausse ; $\neg P$ est fausse quand P est vraie.

S'il est faux d'affirmer : *l'économie ne se porte pas bien*, il est vrai de dire : *l'économie se porte bien*.

◦ Implication. La proposition $P \Rightarrow Q$ se dit : P implique Q ou : P entraîne Q .

$P \Rightarrow Q$: *Si l'économie se porte bien, alors les Français sont heureux*.

$P \Rightarrow Q$ signifie : P ne peut pas être vraie sans que Q le soit, ou encore : P est fausse ou Q est vraie.

Si l'économie se porte bien mais qu'un Français n'est pas heureux, $P \Rightarrow Q$ est fausse.

◦ Réciproque. L'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ est : $Q \Rightarrow P$.

Si l'économie va bien, les Français sont heureux ; Réciproque : *Si les Français sont heureux, l'économie va bien*.

La réciproque d'une implication vraie n'est pas toujours vraie.

Il se peut que les Français soient heureux quand l'économie se porte bien et qu'ils le restent dans le cas contraire.

◦ Equivalence. L'équivalence de P et Q se note : $P \Leftrightarrow Q$; c'est la conjonction de $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

$P \Leftrightarrow Q$: *les Français sont heureux si et seulement si l'économie se porte bien*.

$P \Leftrightarrow Q$ est : vraie quand P et Q ont la même valeur de vérité, fausse dans le cas contraire.

P et Q ne peuvent être équivalentes s'il arrive que les Français soient heureux quand l'économie se porte mal.

◦ Négation d'une implication. La négation de $P \Rightarrow Q$ est : $P \wedge \neg Q$ (P peut être vraie sans que Q le soit).

Nier $P \Rightarrow Q$ c'est affirmer : *Il se peut qu'un Français ne soit pas heureux alors que l'économie se porte bien*.

◦ Contraposée d'une implication. La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est : $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est : *Si les Français ne sont pas heureux, l'économie ne se porte pas bien*.

Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

Si les Français ne sont pas heureux, l'économie ne se porte pas bien est vraie si et seulement si $P \Rightarrow Q$ est vraie.

b) **Propriétés** (les codes et notations sont ceux de 1.a))

(i) $\neg(\neg P) = P$

La négation de $\neg P$ est : *L'économie se porte bien*.

(ii) $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

La négation de $P \wedge Q$ est : *L'économie ne se porte pas bien ou les Français ne sont pas heureux*.

(iii) $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

La négation de $P \vee Q$ est : *L'économie ne se porte pas bien et les Français ne sont pas heureux*.

Théorie des ensembles

a) **Quantificateurs universels**

E est un ensemble, x un élément de E (on note : $x \in E$) et $P(x)$ une proposition dépendant de x .

x est un nombre réel ($E = \mathbb{R}$) et $P(x) : x \leq x^2$.

$\forall x \in E, P(x)$ signifie : quel que soit l'élément x de E , $P(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$: tout nombre réel est inférieur à son carré.

$\exists x \in E, P(x)$ signifie : il existe un élément x de E pour lequel $P(x)$.

$\exists x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$: il existe un réel inférieur à son carré.

$\exists! x \in E, P(x)$ signifie : il existe un unique élément x de E pour lequel $P(x)$.

$\exists! x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$: il existe un unique réel inférieur à son carré.

b) **Cardinal d'un ensemble**

Un ensemble peut être défini en compréhension ou en extension.

L'ensemble des entiers pairs défini en compréhension : $\{x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$, en extension : $\{2k; k \in \mathbb{N}\}$.

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient.

$\text{Card}\{a; b; c\} = 3$; $\text{Card } \mathbb{N} = +\infty$.

Un ensemble est un singleton si son cardinal vaut 1, une paire si son cardinal vaut 2.

$\{c\}$ est un singleton de $A = \{a; b; c\}$, $\{c; a\}$ est une paire d'éléments de A .

$\emptyset$ désigne l'ensemble vide (ne contenant aucun élément).

$\text{Card } \emptyset = 0$.

b) **Ensembles et relations**

$A \subset B$: A est inclus dans B ; tout élément de A est élément de B .

$\{a; b\} \subset \{a; b; c\}$.

Si $A \subset B$, alors $\text{Card } A \leq \text{Card } B$. Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ et $\text{Card } A = \text{Card } B$.

$\{a; b; b; c\} \subset \{a; b; c\}$ et $\{a; b; c\} \subset \{a; b; b; c\}$, donc $\{a; b; b; c\} = \{a; b; c\}$ et $\text{Card}\{a; b; b; c\} = 3$.

$A \not\subset B$: A n'est pas inclus dans B ; il existe un élément de A qui n'est pas dans B .

$\{a; b\} \not\subset \{a\}$.

$a \in A$: a est un élément de (ou appartient à) l'ensemble A ; $a \notin A$: a n'est pas élément de A .

$a \in \{a; b; c\}$; $a \notin \{b; c\}$.

c) **Ensembles et opérations**

$A \cap B$ est l'intersection de A et B : l'ensemble des éléments communs à A et B . Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont disjoints.

$\{a; b; c\} \cap \{d; e; b\} = \{b\}$. $\{a; b; c\}$ et $\{d; e\}$ sont disjoints.

$A \cup B$ est la réunion de A et B : l'ensemble des éléments de A ou B .

$\{a; b; c\} \cup \{d; e; b\} = \{a; b; c; d; e\}$.

$A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A absents de B .

$\{a; b; c\} \setminus \{d; e; b\} = \{a; c\}$.

Les sous-ensembles d'un ensemble A forment l'ensemble des parties de A : $\mathcal{P}(A)$.

$\mathcal{P}(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$.

$A \times B$ est le produit cartésien de A et B : ses éléments sont les couples $(a; b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.

$\{a; b\} \times \{1; \pi; \sqrt{2}\} = \{(a; 1); (b; 1); (a; \pi); (b; \pi); (a; \sqrt{2}); (b; \sqrt{2})\}$.

Une p -liste d'éléments de A est une suite ordonnée à p éléments tirés de A .

Les 3-listes d'éléments de $\{a; b\}$ sont : $(a; a; a)$, $(a; a; b)$, $(a; b; a)$, $(b; a; a)$, $(b; b; a)$, $(b; a; b)$, $(a; b; b)$, $(b; b; b)$.

d) **Propriétés**

A et B sont deux ensembles ; $\text{Card } A = n \in \mathbb{N}$, $\text{Card } B = m \in \mathbb{N}$.

$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$ (Formule du crible).

$A = \{a; b; c\}$, $B = \{d; e; b\}$: $\text{Card } A + \text{Card } B = 3 + 3 = 6$, $\text{Card } A \cup B + \text{Card } A \cap B = 5 + 1 = 6$.

$\text{Card } A \times B = n \times m$.

$\text{Card}(\{a; b\} \times \{1; \pi; \sqrt{2}\}) = 6 = \text{Card}(\{a; b\}) \times \text{Card}(\{1; \pi; \sqrt{2}\})$.

$\text{Card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

$\text{Card}(\mathcal{P}(\{a; b; c\})) = 2^3 = 8$: un ensemble à trois éléments compte huit sous-ensembles.

Le nombre de p -listes d'éléments de A est : n^p .

Le nombre de 3-listes d'éléments de $\{a; b\}$ est $2^3 = 8$.

Le nombre de sous-ensembles à p ($0 \leq p \leq n$) éléments de A est : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Le nombre de sous-ensembles à trois éléments de $\{a; b; c; d\}$ est $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

Notations mathématiques

a) **Sommes ($\sum$) et produits ($\prod$)**

(u_n) est une suite de nombres et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

La somme $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ s'écrit : $\sum_{k=1}^p u_k$.

$$\sum_{k=1}^5 2k = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 = 30.$$

Le produit $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_p$ s'écrit : $\prod_{k=1}^p u_k$.

$$\prod_{k=1}^4 1/k = (1/1) \times (1/2) \times (1/3) \times (1/4) = 1/24.$$

b) **Propriétés de $\sum$ et $\prod$.**

(u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$\sum_{k=1}^p (\alpha u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^p v_k \text{ (linéarité de la somme).}$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{2k+1}{k^2} = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \right) = 2 \sum_{k=1}^5 1/k + \sum_{k=1}^5 1/k^2.$$

$$\prod_{k=1}^p (\alpha u_k) = \alpha^p \prod_{k=1}^p u_k \text{ (homogénéité du produit).}$$

$$\prod_{k=1}^5 (2k) = 2^5 \times 5!$$

$$\prod_{k=1}^p (u_k v_k) = \left(\prod_{k=1}^p u_k \right) \left(\prod_{k=1}^p v_k \right) \text{ (commutativité du produit).}$$

$$\prod_{k=1}^5 k e^k = \left(\prod_{k=1}^5 k \right) \left(\prod_{k=1}^5 e^k \right) = 5! \exp \left(\sum_{k=1}^5 k \right) = 120 e^{15}.$$

c) **Factorielles et combinatoire**

$0! = 1$ et pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $n! = \prod_{k=1}^n k$ (on dit *factorielle* n) est le nombre de façons d'ordonner n objets.

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Il existe 24 façons d'ordonner quatre objets.

Le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de choix de k objets parmi n , sans ordre ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$).

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 120/(2 \times 6) = 120/12 = 10. \text{ Il existe 10 façons de choisir deux objets parmi cinq sans les ordonner.}$$

d) **Propriétés des coefficients binomiaux**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (} n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket \text{)}.$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}. \text{ Il existe autant de façons de choisir deux objets parmi cinq que d'en choisir trois.}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ (} n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \text{)}.$$

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}.$$