Chapitre 1 – Eléments de logique & Notations mathématiques – TD Feuille 1

Exercice 1. (*implication, contraposée, réciproque, négation et valeur de vérité*)

1. Enoncez la réciproque, la contraposée puis la négation de : *Quand on est Français, on est Européen.*

L'assertion : *Quand on est Français, on est Européen* est une implication : $[A$: être Français$] \Rightarrow [B$: être Européen$]$. Sa réciproque inverse l'ordre des propositions : $B \Rightarrow A$ et se dit : *Quand on est Européen, on est Français.* La contraposée inverse l'ordre des propositions en les niant : $\neg B \Rightarrow \neg A$ et se dit : *Quand on n'est pas Européen, on n'est pas Français.* La négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$ et se dit : *On peut être Français sans être Européen.*

2. Quelle est la valeur de vérité de chacune des phrases obtenues ?

L'assertion : *Quand on est Français, on est Européen* est vraie. La contraposée : *Quand on n'est pas Européen, on n'est pas Français* est donc vraie et la négation : *On peut être Français sans être Européen* est fausse. Quant à la réciproque : *Quand on est Européen, on est Français*, elle est fausse.

Exercice 2. (*conjonction, disjonction, négation*)

Enoncez la négation de chacune des assertions :

(a) *John travaille bien et produit beaucoup.*

L'assertion : *John travaille bien et produit beaucoup* est une conjonction : $[A$: *John travaille bien*$] \wedge [B$: *John produit beaucoup*$]$. Sa négation est $\neg A \vee \neg B$: *John travaille mal ou il produit peu.*

(b) *John travaille bien ou produit beaucoup.*

L'assertion : *John travaille bien ou produit beaucoup* est une disjonction : $[A$: *John travaille bien*$] \vee [B$: *John produit beaucoup*$]$. Sa négation est $\neg A \wedge \neg B$: *John travaille mal et il produit peu.*

(c) *Quand son salaire est élevé, John travaille bien.*

L'assertion : *Quand son salaire est élevé, John travaille bien* est une implication : $[A$: *Le salaire de John est élevé*$] \Rightarrow [B$: *John travaille bien*$]$. Sa négation est $A \wedge \neg B$: *Il arrive à John de mal travailler quand son salaire est élevé.*

(d) *Quand son salaire est élevé, John travaille bien et produit beaucoup.*

La négation est : *Il arrive à John de mal travailler ou de produire peu quand son salaire est élevé.*

Exercice 3. (*l'implication comme une disjonction*)

P : *Monstro est une baleine* ; Q : *Monstro est un mammifère.*

1. Traduisez en français : $P \Rightarrow Q$. Cette implication est-elle vraie ? Sa réciproque est-elle vraie ?

$P \Rightarrow Q$ se dit : *Si Monstro est une baleine, alors c'est un mammifère.* Cette implication est vraie (les baleines sont des mammifères). Mais la réciproque $Q \Rightarrow P$: *Si Monstro est un mammifère, alors c'est une baleine* est fausse.

2. Traduisez en français : $\neg P \vee Q$. Cette assertion est-elle vraie ?

$\neg P \vee Q$ se dit : *Monstro est un mammifère ou ce n'est pas une baleine.* Cette disjonction est vraie. En effet, puisque les baleines sont des mammifères, soit Monstro est un mammifère, soit ce n'est pas une baleine.

3. Existe-t-il un lien entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$?

Dans cet exercice, les deux propositions : $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ sont vraies. En dehors de cet exercice, on peut montrer que $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ ont toujours la même valeur de vérité. Ainsi, $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 4. (*quantificateurs universels*)

Déterminez les énoncés vrais parmi :

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Cet énoncé affirme : il existe un réel au moins dont le carré est négatif ou nul. C'est vrai : 0 par exemple.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Cet énoncé affirme : le carré de n'importe quel réel est négatif ou nul. C'est faux : le carré de 1 est strictement positif.

(c) $\exists n \in \mathbb{N} : n/2 \notin \mathbb{N}$

Cet énoncé affirme : il existe un entier naturel dont la moitié n'est pas entière. C'est vrai : la moitié de 1 est $0,5$.

(d) $\exists! n \in \mathbb{N} : n/2 \notin \mathbb{N}$

Cet énoncé affirme : il existe un unique entier naturel dont la moitié n'est pas entière. C'est faux : 1 et 3 sont deux exemples.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 5$

Selon cet énoncé, pour tout réel x, il existe un réel y tel que la somme de x et y vaut 5. C'est vrai : x étant choisi, il suffit de prendre $5 - x$ pour valeur de y.

Exercice 5. (*sous-ensemble, p-liste, produit cartésien et cardinal*)

$A = \{\text{Marc}, \text{Paul}, \text{Jean}\}$; $B = \{\text{Anne}, \text{Lucie}\}$.

1. Citez : (a) un sous-ensemble à deux éléments de A (b) une 2-liste d'éléments de A (c) un élément de $A \times B$.

(a) Un sous-ensemble à deux éléments de A : {Paul, Jean}.
(b) Une 2-liste d'éléments de A : (Paul, Jean).
(c) Un élément du produit Cartésien $A \times B$: (Paul,Lucie).

2. Combien A possède-t-il : (a) de sous-ensembles ? (b) de sous-ensembles à deux éléments ? (c) de 2-listes ?

Le tableau suivant énumère les sous-ensembles de A selon le cardinal.

cardinal	*sous-ensembles de A*
0	$\emptyset$
1	{Paul}, {Marc}, {Jean}
2	{Paul, Marc}, {Paul, Jean}, {Marc, Jean}
3	{Jean, Paul, Marc}

(a) A possède 8 sous-ensembles.
(b) A possède trois sous-ensembles à deux éléments.
(c) Les 2-listes d'éléments de A sont au nombre de 9 : (Marc, Marc), (Marc, Paul), (Marc, Jean), ..., (Jean, Jean).
On peut se passer d'énumérer en utilisant les résultats suivants ($n, p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $k \in [\![0; n]\!]$) :
Un ensemble à n éléments possède : 2^n sous-ensembles, $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments, ses p-listes sont au nombre de n^p.

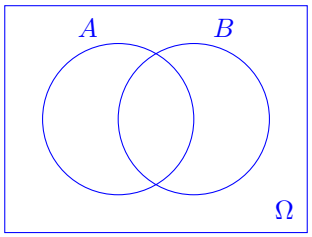
3. Quel est le cardinal de $A \times B$?

A possède trois éléments et B deux éléments ; ainsi, $A \times B$ possède $3 \times 2 = 6$ éléments.

Exercice 6. (*ensembles et opérations, diagramme de Venn, formule du crible*)

Dans un groupe de cent personnes (ensemble Ω), on compte cinquante amateurs de thé (ensemble A), quarante amateurs de café (ensemble B) et trente-cinq personnes déclarent aimer les deux boissons.

1. Représentez les catégories de consommateurs par un diagramme de Venn.



2. Décrivez les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$ et déterminez leur cardinal.
$A \cap B$: les amateurs de thé et de café (ceux qui apprécient les deux boissons) ; ils sont 35.
$A \cup B$: les amateurs de thé ou de café (ceux qui apprécient l'une des boissons au moins) ; ils sont 55 (justification en 3.)
$A\backslash B$: les amateurs de thé qui n'aiment pas le café ; il y en a $50 - 35 = 15$.
$B\backslash A$: les amateurs de café qui n'aiment pas le thé ; il y en a $40 - 35 = 5$.
$(A \cup B)\backslash(A \cap B)$: les personnes qui n'apprécient qu'une seule boisson ; il y en a $55 - 35 = 20$.

3. Combien de sondés n'aiment ni le thé ni le café ?

   Cinquante-cinq sujets apprécient l'une des boissons au moins : Card $A \cup B$ = Card A + Card B − Card $A \cap B$ = $50 + 40 - 35 = 55$. Donc, quarante-cinq personnes n'apprécient aucune des deux boissons.

Exercice 7. (*ensembles, relations et opérations*)

A et B sont deux ensembles.

1. Montrez que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.

Si x est un élément de B, c'est un élément de $A \cup B$; réciproquement, si x est dans $A \cup B$, soit il est dans B, soit il est dans A donc dans B puisque $A \subset B$.

2. Montrez par un contre-exemple que l'égalité : $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$ est fausse.

Si $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c, d\}$ alors $A \backslash (B \backslash C) = \{a, c, d\} \neq (A \backslash B) \backslash C = \{a\}$.

Exercice 8. (*sommes et produits*)

1. Ecrivez la somme : $5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$ en utilisant le symbole $\sum$.

   $5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = \sum_{k=2}^{8}(2k + 1)$.

2. Ecrivez le produit : $8 \times 11 \times 14 \times 17 \times 20$ en utilisant le symbole $\prod$.

   $8 \times 11 \times 14 \times 17 \times 20 = \prod_{k=3}^{7}(3k - 1)$.

3. Développez puis calculez : (a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ (b) $\prod_{k=1}^{5}(2k - 1)$.

   $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

   $\prod_{k=1}^{5}(2k - 1) = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$.

   La somme peut être obtenue sous R par : `sum((1:5)^2)` et le produit par : `prod(2*(1:5)-1)`.

Exercice 9. (*factorielles et coefficients binomiaux*)

1. Calculez : 4!, 6!, 6!/4!, $\binom{6}{4}$.

à calculer	*valeur*	*sous R*	*interprétation*
4!	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$	`factorial(4)`	24 mots sans lettres répétées avec un alphabet de quatre lettres
6!	$6 \times 5 \times \cdots \times 1 = 720$	`factorial(6)`	720 mots sans répétitions avec un alphabet de six lettres
6!/4!	$6 \times 5 = 30$	`factorial(6)/factorial(4)`	30 mots de deux lettres sans répétitions avec un alphabet de six lettres
$\binom{6}{4}$	$6!/(4! \times 2!) = 15$	`choose(6,4)`	15 façons de choisir quatre lettres dans un alphabet de six lettres

2. Vérifiez que $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$.

   $\binom{10}{3} = 10!/(3! \times 7!) = 120$ et $\binom{10}{7} = 10!/(7! \times 3!) = 120$.

3. Ecrivez : 20!, 20!/12!, $\binom{20}{12}$ à l'aide du symbole $\prod$.

   $20! = \prod_{k=1}^{20} k$; $20!/12! = \prod_{k=13}^{20} k$; $\binom{20}{12} = (\prod_{k=13}^{20} k)/(\prod_{k=1}^{8} k)$.

Exercice 10. (*sommes, produits, factorielles et logiciel R*)

A l'aide de R[a], calculez : (a) 10! (b) $\binom{10}{4}$ (c) $\sum_{j=1}^{10}(2j + 1)^3$ (d) $\prod_{k=2}^{10} k/(2k + 1)$.

à calculer/déterminer	*instruction R*	*valeur*
10!	`factorial(10)`	3628800
$\binom{10}{4}$	`choose(10,4)`	210
$\sum_{j=1}^{10}(2j + 1)^3$	`sum((2*(1:10)+1)^3)`	29160
$\prod_{k=2}^{10} k/(2k + 1)$	`prod((2:10)/(2*(2:10)+1))`	$\approx 0,0008$

[a]R est un logiciel libre et gratuit. Vous pouvez le télécharger sur : https://cran.r-project.org/ ou l'utiliser en ligne avec inscription : https://rstudio.cloud/ ou sans inscription : http://ideone.com/